الرياضيات

تمارين وحلول

السنة الثانية من سلك البكالوريا

- شعبة العلوم التجريبية
- علوم التكنولوجيات الميكانيكية
- علوم التكنولوجيات الكهربائية

الجزء الأول



- ملخصات مركزة للدروس
- نماذج مختارة من امتحانات البكالوريا
- مسائل توليفية
- مواضيع للدراسة

تأليف

عبد السلام حقاني — محمد غزايلي

عبد السلام حقاني   محمد غزايلي

الرياضيات

تمارين وحلول

السنة الثانية من سلك البكالوريا

- شعبة العلوم التجريبية
- علوم التكنولوجيات الميكانيكية
- علوم التكنولوجيات الكهربائية

الجزء الأول

- ملخصات مركزة للدروس
- نماذج مختارة من امتحانات البكالوريا
- مسائل توليفية
- مواضيع للدراسة

سلسلة ديماديما



دار الثقافة
مؤسسة للنشر والتوزيع
34-32 شارع فيكتور هيكو — ص.ب. 4038
الهاتف 022.30.76.44 - 022.30.23.75
فاكس 022.30.65.11 — الدار البيضاء 20500

مقدمة

يأتي هذا الكتاب في اطار مساهمة متواضعة، هدفها إمداد تلاميذ شعبة العلوم التجريبية العلوم والتكنولوجيات الميكانيكية والعلوم والتكنولوجيات الكهربائية بتمارين ومسائل متنوعة تساعدهم على تمهير قدراتهم المعرفية، كما تساهم في شحذ تقنياتهم وذلك توخياً للاستعداد الجيد للامتحان الوطني الموحد، وكذا لفروض المراقبة المستمرة.

يضم هذا الكتاب تمارين مرفوقة بحلول تغطي جميع وحدات المقرر الدراسي لبرنامج التحليل المقرر لدى السّنة الثانية من سلك البكالوريا بمسالك العلوم التجريبية والعلوم والتكنولوجيات الميكانيكية والعلوم والتكنولوجيات الكهربائية ومراعاة للخصوصيّة الديداكتيكية لمادة الرياضيات، فقد أرتأينا في حل هذه التمارين إدراج الخاصيات والمبرهنات التي أعتمدناها في الحل. كما أقترحنا إلى جانب ذلك تمارين غير محلولة هدفها دفع التلميذ إلى توظيف مفاهيمه وقدراته قصد تقويمها وقياسها، وتوخياً لأستأناس التلميذ بنماذج الإمتحانات الآكاديميّة، فقد عملنا على إدراج بعض النماذج المتميزة التي لا تحيد غايتها عن الغاية التقويمية آنفة الذكر. كذلك ومراعاة لمبدأ التدرج قد عمدنا إلى اختيار تمارين تدرّجيّة تصاعدية تنتقل من البسيط إلى المعقد مزودَة بأسئلة تمهيدية.

نصائح للتلميذ حول كيفيّة استعمال هذا الكتاب :

1 – يجب أولا دراسة التمرين ومحاولة فك رموزه مستعيناً بمكتسباتك السابقة وبدروسك المنجزة.

2 – عدم اللجوء إلى قراءة الحل إلا بعد البحث وإعادة البحث.

3 – مقارنة ما توصلت إليه بالحل المقترح.

أملنا أن يساعد هذا الكتاب بقدر ما بذل فيه من جهود علمية مخلصة تلاميذنا، وسد جوانب النقص التي قد يستشعرونها بخصوص مادة الرياضيات.

والله ولي التوفيق،

المؤلفان

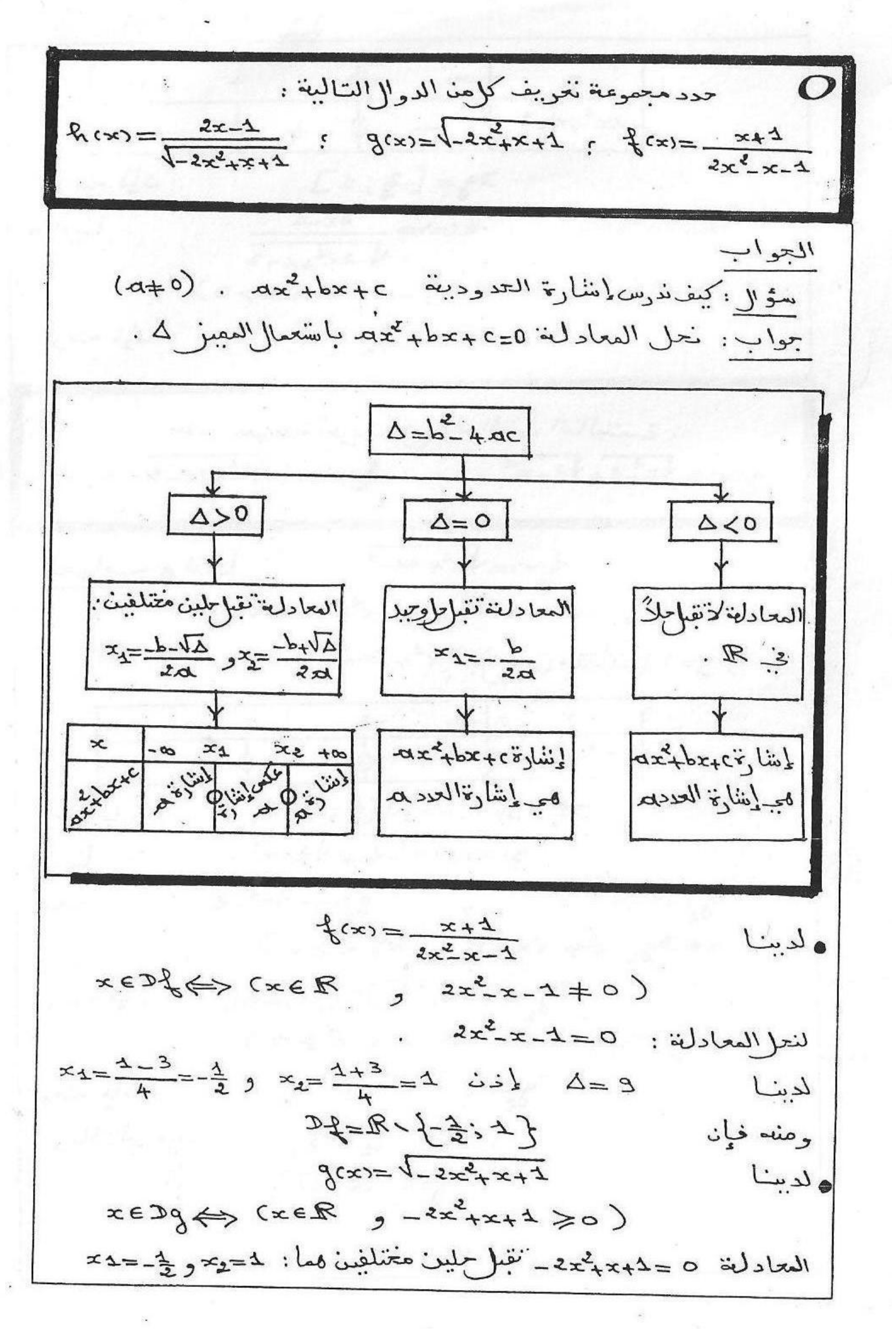
بسم الله الرحمن الرحيم

طبعة 1428 - 2007

الفهرس

	الصفحة
النهايات والإتصال	40-7
– صورة مجال بدالة متصلة	48-41
– مبرهنة القيم الوسيطية	59-49
– الدوال العكسية	80-61
– الدالة الجذرية من الرتبة n	98-81
– الدوال القابلة للاشتقاق	118-105
– الدوال الأصلية	129-119
– دراسة الدوال العددية	201-133
– المتتاليات العددية	239-213
– المتتاليات الحسابية	251-240
– المتتاليات الهندسية	268-252
– نهاية متتالية عددية	306
– دالة اللوغاريتم النيبري	381-325
– دالة اللوغاريتم للأساس a	389-382
– متتاليات معرفة بـ ln	393-390
– دراسة الدوال المعرفة بـ ln	406-394
– الدالة الأسية النيبرية	442-407
– الدالة الأسية للأساس a	455-443
– مسائل محلولة	471-456

النهايات والاتصال



0 حدد مجموعة تعريف كل من الدوال التالية :

$$h(x)=\frac{2x-1}{\sqrt{-2x^2+x+1}} \quad ; \quad g(x)=\sqrt{-2x^2+x+1} \quad ; \quad f(x)=\frac{x+1}{2x^2-x-1}$$

الجواب

سؤال : كيف ندرس إشارة الحدودية ax^2+bx+c . $(a\neq 0)$

جواب : نحل المعادلة $ax^2+bx+c=0$ باستعمال المميز Δ .

$\Delta=b^2-4ac$

- $\Delta>0$: المعادلة تقبل حلين مختلفين : $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
ax^2+bx+c	إشارة a	0 عكس إشارة a	0	إشارة a

- $\Delta=0$: المعادلة تقبل حلا وحيدا $x_1=-\frac{b}{2a}$ ؛ إشارة ax^2+bx+c هي إشارة العدد a
- $\Delta<0$: المعادلة لا تقبل حلاً في $\mathbb{R}$. إشارة ax^2+bx+c هي إشارة العدد a

• لدينا $f(x)=\frac{x+1}{2x^2-x-1}$

$x\in D_f \Leftrightarrow (x\in\mathbb{R} \ , \ 2x^2-x-1\neq 0)$

لنحل المعادلة : $2x^2-x-1=0$.

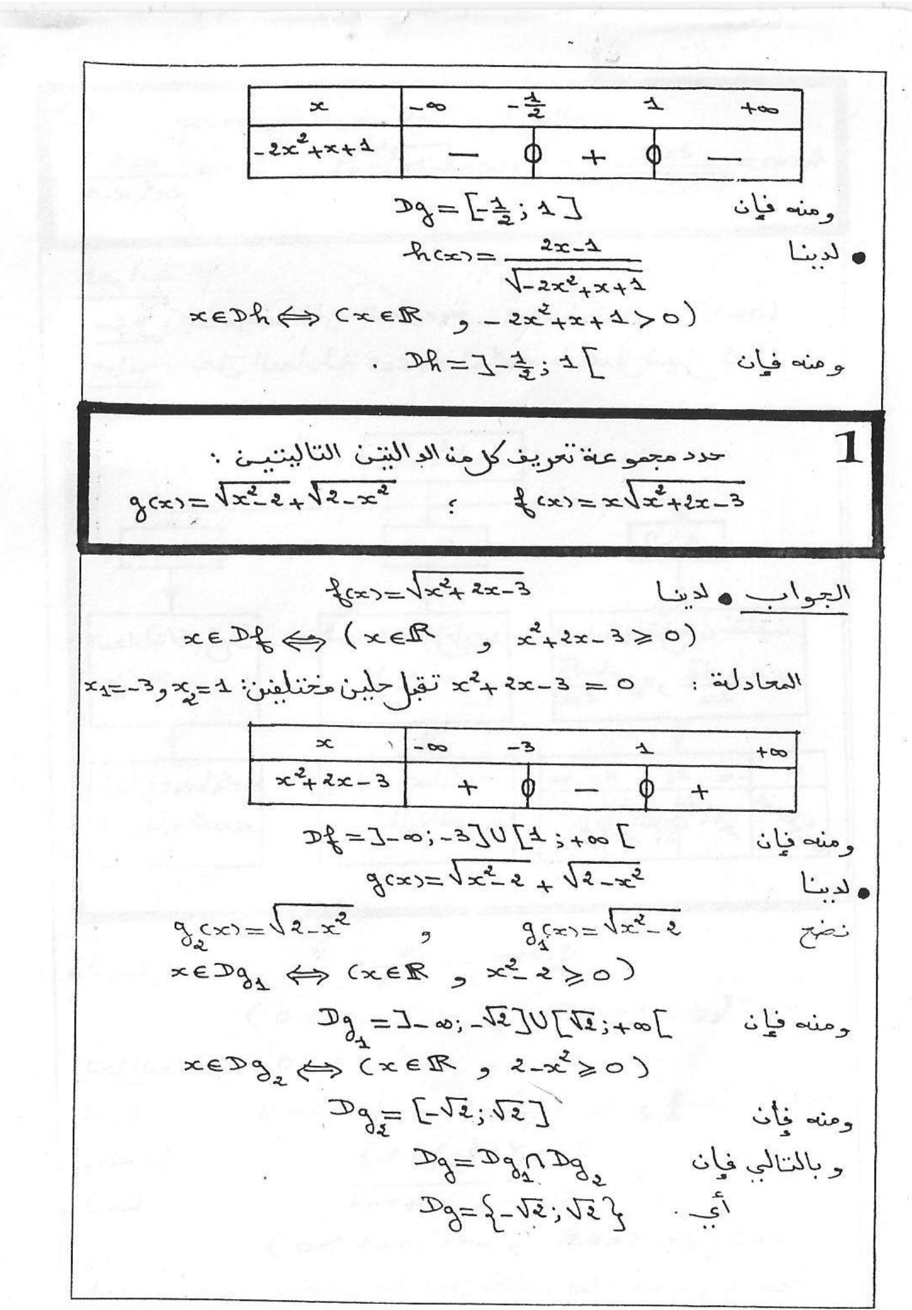
لدينا $\Delta=9$ إذن $x_2=\frac{1+3}{4}=1$ و $x_1=\frac{1-3}{4}=-\frac{1}{2}$

ومنه فإن $D_f=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2};1\right\}$

• لدينا $g(x)=\sqrt{-2x^2+x+1}$

$x\in D_g \Leftrightarrow (x\in\mathbb{R} \ , \ -2x^2+x+1\geq 0)$

المعادلة $-2x^2+x+1=0$ تقبل حلين مختلفين هما : $x_1=-\frac{1}{2}$ و $x_2=1$



x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$-2x^2+x+1$		$-$	0	$+$	0	$-$	

ومنه فإن $D_g=[-\frac{1}{2};1]$

• لدينا $h(x)=\dfrac{2x-1}{\sqrt{-2x^2+x+1}}$

$x\in D_h \iff (x\in\mathbb{R} \ , \ -2x^2+x+1>0)$

ومنه فإن $D_h=]-\frac{1}{2};1[$.

1

حدد مجموعة تعريف كل من الدالتين التاليتين :

$f(x)=x\sqrt{x^2+2x-3}$; $g(x)=\sqrt{x^2-2}+\sqrt{2-x^2}$

الجواب • لدينا $f(x)=\sqrt{x^2+2x-3}$

$x\in D_f \iff (x\in\mathbb{R} \ , \ x^2+2x-3\geq 0)$

المعادلة : $x^2+2x-3=0$ تقبل حلين مختلفين: $x_1=-3, x_2=1$

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
x^2+2x-3		$+$	0	$-$	0	$+$	

ومنه فإن $D_f=]-\infty;-3]\cup[1;+\infty[$

• لدينا $g(x)=\sqrt{x^2-2}+\sqrt{2-x^2}$

نضع $g_1(x)=\sqrt{x^2-2}$ و $g_2(x)=\sqrt{2-x^2}$

$x\in D_{g_1} \iff (x\in\mathbb{R} \ , \ x^2-2\geq 0)$

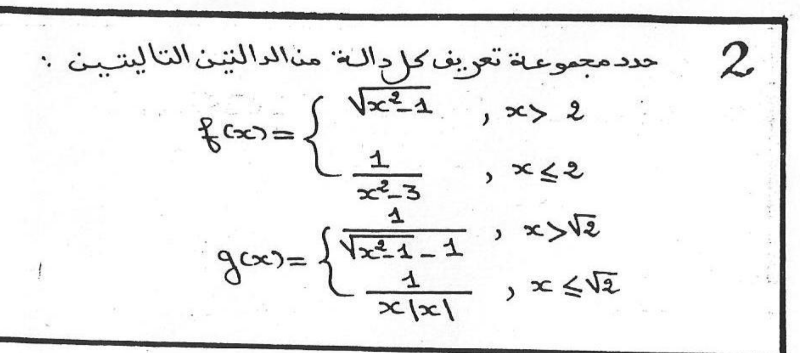
ومنه فإن $D_{g_1}=]-\infty;-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2};+\infty[$

$x\in D_{g_2} \iff (x\in\mathbb{R} \ , \ 2-x^2\geq 0)$

ومنه فإن $D_{g_2}=[-\sqrt{2};\sqrt{2}]$

و بالتالي فإن $D_g=D_{g_1}\cap D_{g_2}$

أي $D_g=\{-\sqrt{2};\sqrt{2}\}$



2

حدد مجموعة تعريف كل دالة من الدالتين التاليتين :

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-1} & , x>2\\ \dfrac{1}{x^2-3} & , x\leq 2\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}-1} & , x>\sqrt{2}\\ \dfrac{1}{x|x|} & , x\leq\sqrt{2}\end{cases}$$

Astuce n°1

$$f(x)=\begin{cases}f_1(x) & , x\in I\\ f_2(x) & , x\in J\end{cases}$$

$$D_f=(D_{f_1}\cap I)\cup(D_{f_2}\cap J)$$

الجواب لدينا

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-1} & x>2\\ \dfrac{1}{x^2-3} & x\leq 2\end{cases}$$

نضع $f_1(x)=\sqrt{x^2-1}$ و $I=]2,+\infty[$

$f_2(x)=\dfrac{1}{x^2-3}$ و $J=]-\infty,2]$

$x\in D_{f_1} \iff (x\in\mathbb{R}$ و $x^2-1\geq 0)$

$\iff (x\in\mathbb{R}$ و $(x-1)(x+1)\geq 0)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

ومنه $D_{f_1}=]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$

إذن $D_{f_1}\cap I=]2,+\infty[$

$x\in D_{f_2} \iff (x\in\mathbb{R}$ و $x^2-3\neq 0)$

$\iff (x\in\mathbb{R}$ و $x\neq\sqrt{3}$ و $x\neq-\sqrt{3})$

ومنه $D_{f_2}=\mathbb{R}\setminus\{-\sqrt{3},\sqrt{3}\}$

إذن $D_{f_2}\cap J=]-\infty,-\sqrt{3}[\cup]-\sqrt{3},\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3},2]$

إذن $D_f = (D_{f_1}\cap I)\cup(D_{f_2}\cap J)$

$$D_f =]-\infty,-\sqrt{3}[\,\cup\,]-\sqrt{3},\sqrt{3}[\,\cup\,]\sqrt{3},+\infty[$$

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}-1}, & x>\sqrt{2}\\[2mm] \dfrac{1}{x|x|}, & x\leq\sqrt{2}\end{cases}$$

نضع $g_1(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}-1}$ و $I'=]\sqrt{2},+\infty[$

$g_2(x)=\dfrac{1}{x|x|}$ و $J'=]-\infty,\sqrt{2}]$

$x\in D_{g_1} \iff (x\in\mathbb{R}$ و $x^2-1\geq0$ و $\sqrt{x^2-1}-1\neq0)$

$\iff (x\in\mathbb{R}$ و $(x-1)(x+1)\geq0$ و $\sqrt{x^2-1}\neq1)$

$\iff (x\in\mathbb{R}$ و $(x-1)(x+1)\geq0$ و $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})\neq0)$

$\iff (x\in\mathbb{R}$ و $(x-1)(x+1)\geq0$ و $x\neq-\sqrt{2}$ و $x\neq\sqrt{2})$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

ومنه $D_{g_1}=]-\infty,-\sqrt{2}[\,\cup\,]-\sqrt{2},-1]\cup[1,\sqrt{2}[\,\cup\,]\sqrt{2},+\infty[$

إذن $D_{g_1}\cap I'=]\sqrt{2},+\infty[$

$x\in D_{g_2}\iff (x\in\mathbb{R}$ و $x|x|\neq0)$

$\iff (x\in\mathbb{R}$ و $x\neq0)$

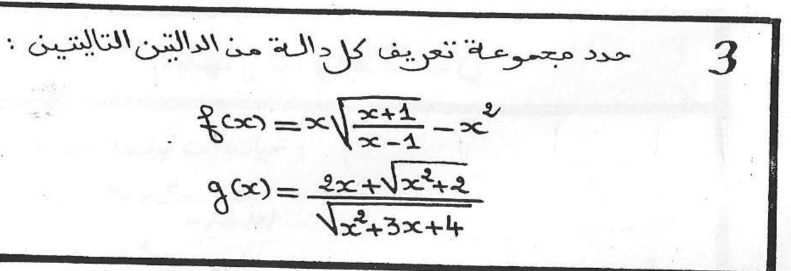
ومنه $D_{g_2}=\mathbb{R}^*$

إذن $D_{g_2}\cap J'=]-\infty,0[\,\cup\,]0,\sqrt{2}]$

وبالتالي $D_g=(D_{g_1}\cap I')\cup(D_{g_2}\cap J')$

$$D_g=]-\infty,0[\,\cup\,]0,\sqrt{2}]\cup]\sqrt{2},+\infty[$$

$$D_g=]-\infty,0[\,\cup\,]0,+\infty[$$



3 حدد مجموعة تعريف كل دالة من الدالتين التاليتين :

$$f(x)=x\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-x^2$$

$$g(x)=\frac{2x+\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{x^2+3x+4}}$$

الجواب

لدينا $f(x)=x\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}-x^2$

$x\in D_f\iff (x\in\mathbb{R}$ و $x-1\neq0$ و $\dfrac{x+1}{x-1}\geq0)$

$\iff (x\in\mathbb{R}$ و $x\neq1$ و $\dfrac{x+1}{x-1}\geq0)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{x+1}{x-1}$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

ومنه $D_f=]-\infty,-1]\cup]1,+\infty[$

لدينا $g(x)=\dfrac{2x+\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{x^2+3x+4}}$

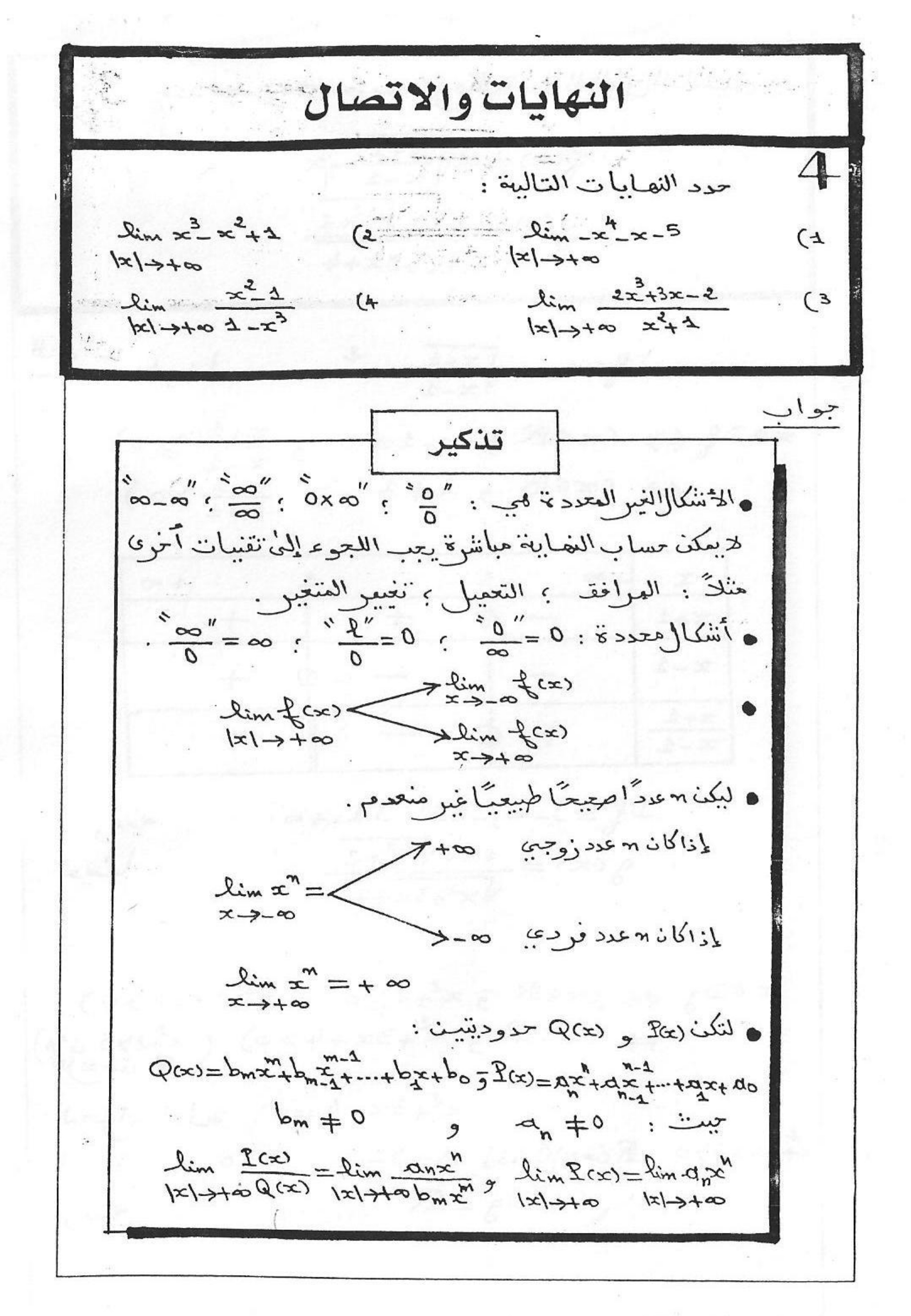
$x\in D_g\iff (x\in\mathbb{R}$ و $x^2+2\geq0$ و $x^2+3x+4>0)$

$\iff (x\in\mathbb{R}$ و $x^2+3x+4>0)$ (لأن $x^2+2>0$ لكل x من $\mathbb{R}$)

لنحل المعادلة $x^2+3x+4=0$

لدينا $\Delta=9-12=-3<0$ إذن لكل x من $\mathbb{R}$ $x^2+3x+4>0$

ومنه $D_g=\mathbb{R}$



النهايات والاتصال

4 حدد النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{|x|\to+\infty} -x^4-x-5$ 2) $\lim\limits_{|x|\to+\infty} x^3-x^2+1$

3) $\lim\limits_{|x|\to+\infty} \frac{2x^3+3x-2}{x^2+1}$ 4) $\lim\limits_{|x|\to+\infty} \frac{x^2-1}{1-x^3}$

جواب

تذكير

- الأشكال الغير المحددة هي : "$\infty-\infty$" ؛ "$\frac{\infty}{\infty}$" ؛ "$0\times\infty$" ؛ "$\frac{0}{0}$"
لا يمكن حساب النهاية مباشرة يجب اللجوء إلى تقنيات أخرى
مثلاً : المرافق ، التعميل ، تغيير المتغير.
- أشكال محددة : "$\frac{0}{\infty}$"$=0$ ؛ "$\frac{\ell}{0}$"$=0$ ؛ "$\frac{\infty}{0}$"$=\infty$.
- $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)$ → $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
- ليكن n عدداً صحيحاً طبيعياً غير منعدم.

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = +\infty$ إذا كان n عدد زوجي

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty$ إذا كان n عدد فردي

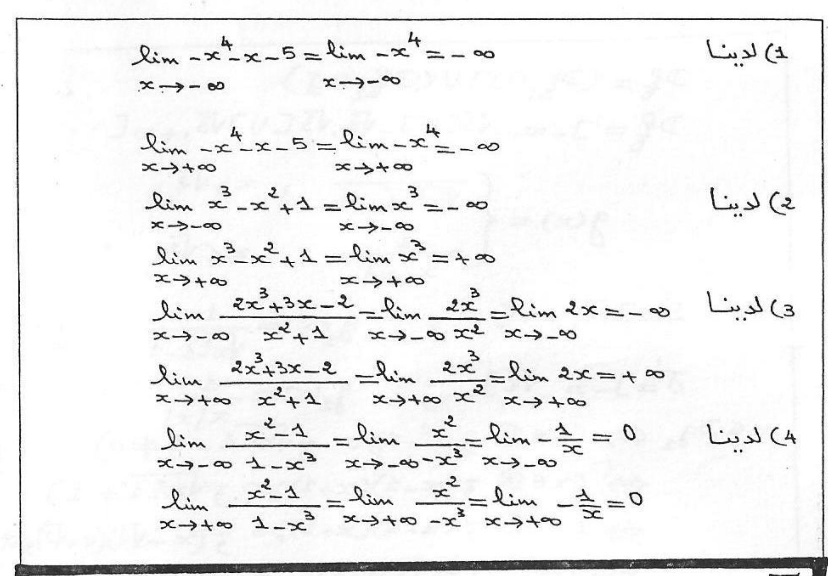
$\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$

- لتكن $P(x)$ و $Q(x)$ حدوديتين :

$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ و $Q(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0$

حيث : $a_n\neq0$ و $b_m\neq0$

$\lim\limits_{|x|\to+\infty} P(x)=\lim\limits_{|x|\to+\infty} a_nx^n$ و $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}$



1) لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} -x^4-x-5=\lim\limits_{x\to-\infty} -x^4=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} -x^4-x-5=\lim\limits_{x\to+\infty} -x^4=-\infty$

2) لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3-x^2+1=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$

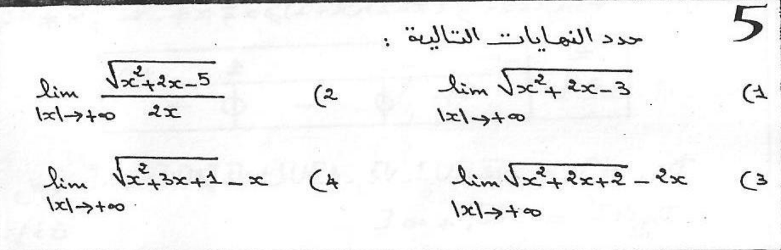
$\lim\limits_{x\to+\infty} x^3-x^2+1=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$

3) لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^3+3x-2}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}2x=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^3+3x-2}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}2x=+\infty$

4) لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-1}{1-x^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{-x^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}-\frac{1}{x}=0$

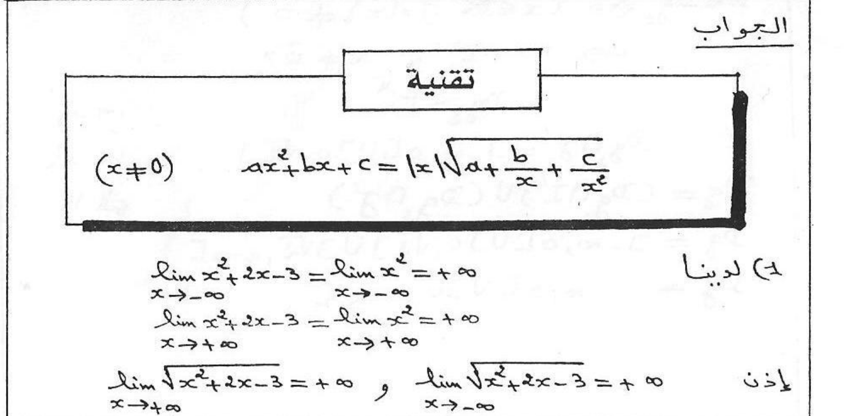
$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{1-x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{-x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{1}{x}=0$



5 حدد النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\sqrt{x^2+2x-3}$ 2) $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x-5}}{2x}$

3) $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\sqrt{x^2+2x+2}-2x$ 4) $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\sqrt{x^2+3x+1}-x$



الجواب

تقنية

$$ax^2+bx+c=|x|\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}} \quad (x\neq0)$$

1) لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+2x-3=\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+2x-3=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$

إذن $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+2x-3}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2x-3}=+\infty$

2) لدينا

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x-5}}{2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}}}{2x}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}}}{2}=-\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x-5}}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}}}{2}=\frac{1}{2}$$

3) لدينا

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+2x+2}-2x=\lim_{x\to-\infty}|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}-2x$$
$$=\lim_{x\to-\infty}-x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+2\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2x+2}-2x=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}-2\right)=-\infty$$

4) لدينا $\lim_{x\to-\infty}x^2+3x+1=\lim_{x\to-\infty}x^2=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}-x=+\infty$

ومنه $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+3x+1}-x=+\infty$

لدينا

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+3x+1}-x=\lim_{x\to+\infty}|x|\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}-x$$
$$=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}-1\right)="+\infty\times0"$$ شكل غير محدد
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}^{\,2}-1^2\right)}{\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{3}{2}$$

6 حدد النهايات التالية:

1) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x-2}}$
2) $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x+3}\left(3x-\sqrt{x^2+2x}\right)$
3) $\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1-\sqrt{x^2-x}}{x-3-\sqrt{x^2+x}}$
4) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-3x+7}-\sqrt{x^2+5x+9}$

الجواب

1) لدينا

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x-2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\left(1-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\left(1-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}\sqrt{1-\frac{2}{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{2}{\sqrt{x}}}{\sqrt{1-\frac{2}{x}}}$$
$$=1$$

2) لدينا

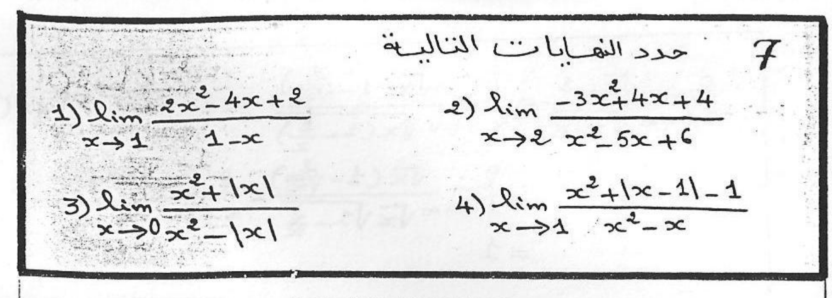
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x+3}\left(3x-\sqrt{x^2+2x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x}{x+3}-\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x+3}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x}{x\left(1+\frac{3}{x}\right)}-\frac{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}}}{x\left(1+\frac{3}{x}\right)}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{1+\frac{3}{x}}+\frac{\sqrt{1+\frac{2}{x}}}{1+\frac{3}{x}}$$
$$=4$$

3) لدينا

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1-\sqrt{x^2-x}}{x-3-\sqrt{x^2+x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)-|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{x\left(1-\frac{3}{x}\right)-|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)+x\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{x\left(1-\frac{3}{x}\right)+x\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{1}{x}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{1-\frac{3}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$$
$$=1$$

4) لدينا $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-3x+7}-\sqrt{x^2+5x+9}="+\infty-\infty"$ شكل غير محدود

$$=\lim_{x\to+\infty}|x|\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{7}{x^2}}-|x|\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{9}{x^2}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{7}{x^2}}-\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{9}{x^2}}\right)="+\infty\times0"$$ شكل غير محدود
$$=\lim_{x\to+\infty}x\,\frac{\left(1-\frac{3}{x}+\frac{7}{x^2}\right)-\left(1-\frac{5}{x}+\frac{9}{x^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{7}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{9}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{7}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{9}{x^2}}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{2}{x}}{\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{7}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{9}{x^2}}}=1$$



7 حدد النهايات التالية

1) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2-4x+2}{1-x}$

2) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{-3x^2+4x+4}{x^2-5x+6}$

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+|x|}{x^2-|x|}$

4) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+|x-1|-1}{x^2-x}$

تذكير

لتكن P دالة حدودية و α عدد حقيقي.

إذا كان $P(\alpha)=0$ فإن $P(x)$ تقبل القسمة على $(x-\alpha)$

الجواب

1) لدينا $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2-4x+2}{1-x} = \text{"}\dfrac{0}{0}\text{"}$ شكل غير محدد

$$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(2x+2)}{-(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1} -(2x+2) = -4$$

2) لدينا $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{-3x^2+4x+4}{x^2-5x+6} = \text{"}\dfrac{0}{0}\text{"}$ شكل غير محدد

$$= \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(-3x-2)}{(x-2)(x-3)} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{-3x-2}{x-3} = 8$$

3) لدينا $(|x|^2=x^2)$

$$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+|x|}{x^2-|x|} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|(|x|+1)}{|x|(|x|-1)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|+1}{|x|-1} = -1$$

4) لدينا $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+|x-1|-1}{x^2-x} = \text{"}\dfrac{0}{0}\text{"}$ شكل غير محدد

$$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{x^2+|x-1|-1}{x^2-x} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{x^2-1-(x-1)}{x(x-1)} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{(x-1)(x+1)-(x-1)}{x(x-1)}$$

$$= \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{(x-1)(x+1-1)}{x(x-1)} = 1$$

$$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{x^2+|x-1|+1}{x^2-x} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{x^2-1+(x-1)}{x(x-1)}$$

$$= \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{(x-1)(x+1)+(x-1)}{x(x-1)}$$

$$= \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{(x-1)(x+2)}{x(x-1)} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} x+2 = 3$$

بما أن $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{x^2+|x-1|-1}{x^2-x} \neq \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{x^2+|x-1|-1}{x^2-x}$

فإن الدالة $x \longmapsto \dfrac{x^2+|x-1|-1}{x^2-x}$ لا تقبل نهاية في $x_0=1$.

8 حدد النهايات التالية

1) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x^2-x}$

3) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{1-3x}-\sqrt{x+5}}{x+1}$

4) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{\sqrt{6-x}-\sqrt{x+2}}$

الجواب

1) لدينا

$$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{\sqrt{x}+1} = \dfrac{1}{2}$$

2) لدينا

$$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x^2-x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(x-1)(\sqrt{x+1}+1)}$$

$$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x+1)-1}{x(x-1)(\sqrt{x+1}+1)}$$

$$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{(x-1)(\sqrt{x+1}+1)} = -\dfrac{1}{2}$$

3) لدينا

$$\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{1-3x}-\sqrt{x+5}}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(\sqrt{1-3x}-\sqrt{x+5})(\sqrt{1-3x}+\sqrt{x+5})}{(x+1)(\sqrt{1-3x}+\sqrt{x+5})}$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{1-3x}-\sqrt{x+5}}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(1-3x)-(x+5)}{(x+1)(\sqrt{1-3x}+\sqrt{x+5})}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{-4(x+1)}{(x+1)(\sqrt{1-3x}+\sqrt{x+5})}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{-4}{\sqrt{1-3x}+\sqrt{x+5}}=-1$$

4) لدينا

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{4x+1}-3}{\sqrt{6-x}-\sqrt{x+2}}=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{4x+1}+3)(\sqrt{4x+1}-3)(\sqrt{6-x}+\sqrt{x+2})}{(\sqrt{4x+1}+3)(\sqrt{6-x}-\sqrt{x+2})(\sqrt{6-x}+\sqrt{x+2})}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{[(4x+1)-3](\sqrt{6-x}+\sqrt{x+2})}{(\sqrt{4x+1}+3)[(6-x)-(x+2)]}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{2(x-2)(\sqrt{6-x}+\sqrt{x+2})}{-2(x-2)(\sqrt{4x+1}+3)}$$

$$=\lim_{x\to 2}-\frac{\sqrt{6-x}+\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}+3}=-\frac{2}{3}$$

9

حدد النهايات التالية:

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{2x-3}{x-1}$

2) $\lim\limits_{\substack{x\to \frac{1}{2}\\ x>\frac{1}{2}}}\frac{x-3}{1-2x}$

3) $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}}\frac{-x+5}{x^2+3x+2}$

4) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{-3x+1}{(x-2)^2}$

الجواب

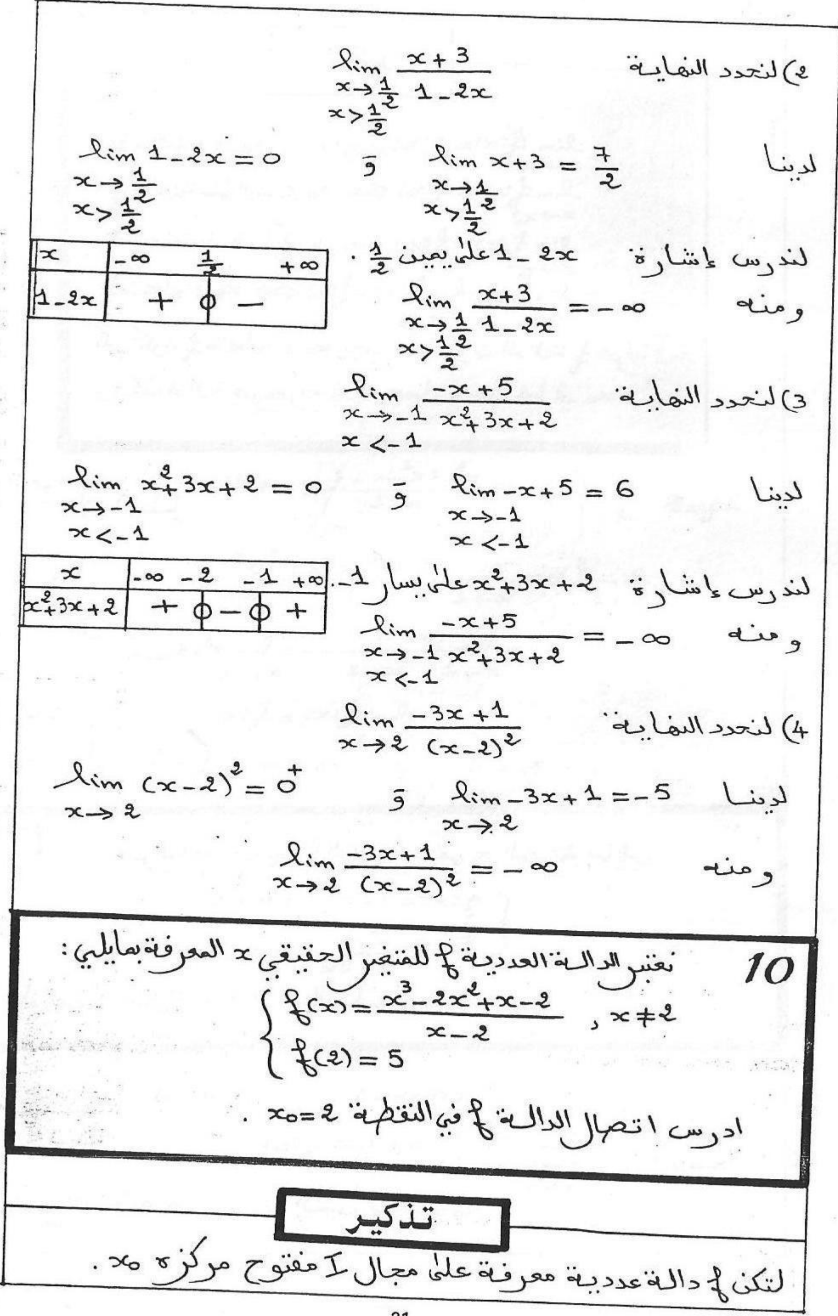
1) لنحدد النهاية $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{2x-3}{x-1}$

لدينا $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}2x-3=-1$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}x-1=0$

x	$-\infty$ 1 $+\infty$
$x-1$	$-$ 0 $+$

لندرس إشارة $x-1$ على يسار 1 .

ومنه $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{2x-3}{x-1}=+\infty$



2) لنحدد النهاية $\lim\limits_{\substack{x\to \frac{1}{2}\\ x>\frac{1}{2}}}\frac{x+3}{1-2x}$

لدينا $\lim\limits_{\substack{x\to \frac{1}{2}\\ x>\frac{1}{2}}}x+3=\frac{7}{2}$ و $\lim\limits_{\substack{x\to \frac{1}{2}\\ x>\frac{1}{2}}}1-2x=0$

x	$-\infty$ $\frac{1}{2}$ $+\infty$
$1-2x$	$+$ 0 $-$

لندرس إشارة $1-2x$ على يمين $\frac{1}{2}$.

ومنه $\lim\limits_{\substack{x\to \frac{1}{2}\\ x>\frac{1}{2}}}\frac{x+3}{1-2x}=-\infty$

3) لنحدد النهاية $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}}\frac{-x+5}{x^2+3x+2}$

لدينا $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}}-x+5=6$ و $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}}x^2+3x+2=0$

x	$-\infty$ -2 -1 $+\infty$
x^2+3x+2	$+$ 0 $-$ 0 $+$

لندرس إشارة x^2+3x+2 على يسار -1 .

ومنه $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}}\frac{-x+5}{x^2+3x+2}=-\infty$

4) لنحدد النهاية $\lim\limits_{x\to 2}\frac{-3x+1}{(x-2)^2}$

لدينا $\lim\limits_{x\to 2}-3x+1=-5$ و $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)^2=0^+$

ومنه $\lim\limits_{x\to 2}\frac{-3x+1}{(x-2)^2}=-\infty$

10

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي:

$$\begin{cases} f(x)=\frac{x^3-2x^2+x-2}{x-2}, & x\neq 2\\ f(2)=5 \end{cases}$$

ادرس اتصال الدالة f في النقطة $x_0=2$.

تذكير

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I مفتوح مركزه x_0 .

تذكير

f متصلة في $x_0 \iff \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

f متصلة على اليمين في $x_0 \iff \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$

f متصلة على اليسار في $x_0 \iff \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$

f متصلة في $x_0 \iff \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$

لكي تكون f متصلة في x_0 يجب أن تكون الدالة f معرفة في x_0

ويمكن لدالة غير معرفة في x_0 حساب نهايتها في x_0.

الجواب لدينا

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^3-2x^2+x-2}{x-2} & ; x\neq 2 \\ f(2)=5 \end{cases} \quad \text{و} \quad D_f=\mathbb{R}$$

ولدينا

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2+x-2}{x-2}=\text{"}\frac{0}{0}\text{"}$$

شكل غير محدد

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+1)}{x-2}=\lim_{x\to 2} x^2+1=5$$

إذن $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$

ومنه فإن الدالة f متصلة في النقطة $x_0=2$.

11

نعتبر الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} g(x)=3-x^2 & ; x<0 \\ g(x)=\dfrac{x^2-1}{1-2x} & ; x\geq 0 \end{cases}$$

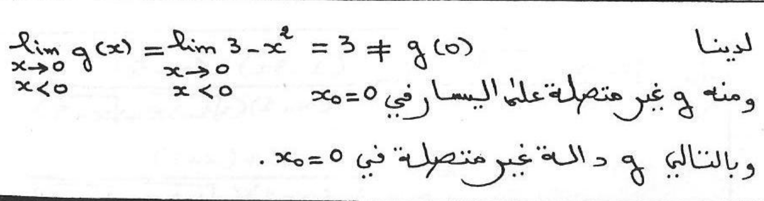
ادرس اتصال الدالة g في النقطة $x_0=0$.

الجواب لدينا $g(0)=-1$

ولدينا

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{x^2-1}{1-2x}=-1=g(0)$$

إذن الدالة g متصلة على اليمين في $x_0=0$.



لدينا

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} g(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} 3-x^2=3\neq g(0)$$

ومنه g غير متصلة على اليسار في $x_0=0$

وبالتالي g دالة غير متصلة في $x_0=0$.

12

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=x^2-3x & , x\leq 1 \\ f(x)=\dfrac{3x^2-5}{2x-1} & , x>1 \end{cases}$$

ادرس اتصال الدالة f في النقطة $x_0=1$.

الجواب لدينا $f(1)=-2$

ولدينا

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} x^2-3x=-2=f(1)$$

ومنه f متصلة على اليسار في $x_0=1$.

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{3x^2-5}{2x-1}=-2=f(1)$$

ومنه f متصلة على اليمين في $x_0=1$.

بما أن f متصلة على اليسار وعلى اليمين في $x_0=1$ فإنها متصلة في $x_0=1$.

13

ليكن a عددا حقيقيا و f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=-x^2+2 & , x\leq 1 \\ f(x)=\dfrac{ax-2}{2(x-2)} & , x>1 \end{cases}$$

حدد قيمة العدد a التي من أجلها تكون الدالة f متصلة في $x_0=1$

الجواب لدينا $f(1)=1$

f متصلة في $x_0=1 \iff \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=f(1)$

f متصلة في $x_0=1$ $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} -x^2+2=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} \frac{ax-1}{2(x-2)}=1$

f متصلة في $x_0=1$ $\Leftrightarrow$ $-\frac{1}{2}(a-1)=1$

f متصلة في $x_0=1$ $\Leftrightarrow$ $a=-1$

14

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي :

$$f(x)=\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}$$

بين أن الدالة f تقبل تمديدا بالاتصال في النقطة $x_0=2$.

الجواب

التمديد بالاتصال

f دالة تقبل تمديدا بالاتصال في نقطة x_0 إذا توفر لدينا الشرطين :

(1) $x_0 \notin D_f$.

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l\in\mathbb{R}$.

والتمديد بالاتصال للدالة f في x_0 هي الدالة g المعرفة بمايلي :

$$\begin{cases} g(x)=f(x) & ; x\in D_f \\ g(x_0)=l \end{cases}$$

لدينا $f(x)=\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}$

$x\in D_f \Leftrightarrow (x\in\mathbb{R} \text{ , } x+7\geq0 \text{ , } x-2\neq0)$

$\Leftrightarrow (x\in\mathbb{R} \text{ , } x\geq-7 \text{ , } x\neq2)$

ومنه فإن $D_f=[-7;2[\cup]2;+\infty[$ إذن $2\notin D_f$.

ولدينا $\lim\limits_{x\to2} f(x)=\lim\limits_{x\to2}\frac{(\sqrt{x+7}-3)(\sqrt{x+7}+3)}{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}$

$=\lim\limits_{x\to2}\frac{(x+7)-9}{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}$

$=\lim\limits_{x\to2}\frac{1}{\sqrt{x+7}+3}=\frac{1}{6}\in\mathbb{R}$

وبالتالي الدالة f تقبل تمديدا بالاتصال في $x_0=2$ ، الدالة g المعرفة بمايلي :

$$\begin{cases} g(x)=\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2} & , x\in D_f \\ g(2)=\frac{1}{6} \end{cases}$$

أو $\forall x\in[-7,+\infty[\quad g(x)=\frac{1}{\sqrt{x+7}+3}$

15

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي :

$$f(x)=\frac{x^2-2x}{|x-1|-1}$$

هل الدالة f تقبل تمديدا بالاتصال في النقطتين $x_0=0$ و $x_1=2$ ؟

الجواب

لدينا $x\in D_f \Leftrightarrow (x\in\mathbb{R}$ و $|x-1|-1\neq0)$

$\Leftrightarrow (x\in\mathbb{R}$ و $x-1\neq1$ و $x-1\neq-1)$

$\Leftrightarrow (x\in\mathbb{R}$ و $x\neq2$ و $x\neq0)$

ومنه $D_f=\mathbb{R}\setminus\{0,2\}$

إذن $0\notin D_f$ و $2\notin D_f$

ولدينا $\lim\limits_{x\to0} f(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2-2x}{(1-x)-1}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x(x-2)}{-x}$

$=\lim\limits_{x\to0} -x+2 = 2\in\mathbb{R}$

ومنه الدالة f تقبل تمديدا بالاتصال في $x_0=0$.

لدينا $\lim\limits_{x\to2} f(x)=\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-2x}{(x-1)-1}=\lim\limits_{x\to2}\frac{x(x-2)}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to2} x=2 \in\mathbb{R}$

ومنه الدالة f تقبل تمديدا بالاتصال في $x_1=2$.

وبالتالي الدالة f تقبل تمديدا بالاتصال في النقطتين $x_0=0$ و $x_1=2$ و g المعرفة بمايلي :

$$\begin{cases} g(x)=\frac{x^2-2x}{|x-1|-1} & , x\in D_f \\ g(2)=g(0)=2 \end{cases}$$

16 نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي :

$$f(x) = \frac{x^2-1}{|x-1|}$$

هل الدالة f تقبل تمديدا بالإتصال في النقطة $x_0=1$ ؟

الجواب

$$x \in D_f \Leftrightarrow (x\in\mathbb{R} \text{ و } |x-1| \neq 0)$$
$$\Leftrightarrow (x\in\mathbb{R} \text{ و } x-1 \neq 0)$$
$$\Leftrightarrow (x\in\mathbb{R} \text{ و } x \neq 1)$$

ومنه $1 \notin D_f = \mathbb{R}\setminus\{1\}$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{(x-1)(x+1)}{-(x-1)} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} -(x+1) = -2$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} x+1 = 2$$

بما أن $\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) \neq \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)$

فإن الدالة f لا تقبل نهاية في النقطة $x_0=1$

ومنه الدالة f لا تقبل تمديدا بالإتصال في النقطة $x_0=1$.

إتصال دالة على مجال

17 نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي :

$$\begin{cases} f(x) = 3x^2-2x+1 & , x \leq 1 \\ f(x) = \dfrac{x^3+x-1}{x+1} & , x > 1 \end{cases}$$

ادرس اتصال الدالة f على كل من المجالين $]1,+\infty[$ و $]-\infty,1[$

تذكير

- الدوال الحدودية والدوال الجذرية متصلة على حيز تعريفها .

- مجموع وجداء وخارج دوال متصلة هي دوال متصلة على حيز تعريفها .

الجواب

$$\begin{cases} f(x) = 3x^2-2x+1 & , x \leq 1 \\ f(x) = \dfrac{x^3+x-1}{x+1} & , x > 1 \end{cases}$$

بما أن الدالة $x \mapsto 3x^2-2x+1$ متصلة على $\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية فإنها متصلة على $]-\infty,1[$

ومنه f متصلة على المجال $]-\infty,1[$

بما أن الدالة $x \mapsto \dfrac{x^3+x-1}{x+1}$ متصلة على $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ لأنها دالة جذرية فإنها متصلة على $]1,+\infty[$.

ومنه f متصلة على المجال $]1,+\infty[$.

وبالتالي الدالة f متصلة على $]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$

18 نعتبر الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي :

$$g(x) = \frac{|x^2-x+3|}{x^2+x+1} - \sqrt{x^2+x+1}$$

بين أن الدالة g متصلة على $\mathbb{R}$.

تذكير

إذا كانت u دالة متصلة على I فإن الدالة $|u|$ متصلة على I .

إذا كانت u دالة متصلة وموجبة على I فإن الدالة $\sqrt{u}$ متصلة على I .

الجواب لدينا

$$g(x) = \frac{|x^2-x+3|}{x^2-x+1} - \sqrt{x^2+x+1}$$
$$= |x^2-x+3| \times \frac{1}{x^2-x+1} - \sqrt{x^2+x+1}$$

$x\in D_g \Leftrightarrow (x\in\mathbb{R}$ و $x^2-x+1\neq 0$ و $x^2+x+1\geq 0)$

بما أن مميز الحدوديتين x^2+x+1 و x^2-x+1

هو $\Delta=-3<0$

فإن لكل x من $\mathbb{R}$: $x^2+x+1>0$ و $x^2-x+1\neq 0$

ومنه $D_g=\mathbb{R}$

بما أن $g_1: x\mapsto |x^2-x+3|$ و $g_2: x\mapsto \frac{1}{x^2-x+1}$

و $g_3: x\mapsto\sqrt{x^2+x+1}$ دوال متصلة على $\mathbb{R}$.

فإن الدالة $g=g_1g_2-g_3$ متصلة على $\mathbb{R}$

19

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي :

$$\begin{cases} f(x)=\frac{x^3-4x^2+2x+1}{x^2-1} & , x<1 \\ f(x)=\frac{x-4}{3x-1} & , x\geq 1 \end{cases}$$

1) حدد حيز تعريف الدالة f : D_f .

2) ادرس نهايات الدالة f عند محدات D_f .

3) ادرس اتصال الدالة f في النقطة $x_0=1$.

4) ادرس اتصال الدالة f على D_f .

الجواب 1) تحديد D_f .

نضع $f_1(x)=\frac{x^3-4x^2+2x+1}{x^2-1}$ و $I=]-\infty,1[$

$f_2(x)=\frac{x-4}{3x-1}$ و $J=[1,+\infty[$

إذن $D_f=(D_{f_1}\cap I)\cup(D_{f_2}\cap J)$

لدينا $x\in D_{f_1}\Leftrightarrow (x\in\mathbb{R}$ و $x^2-1\neq 0)$

$\Leftrightarrow (x\in\mathbb{R}$ و $(x-1)(x+1)\neq 0)$

$\Leftrightarrow (x\in\mathbb{R}$ و $x\neq -1$ و $x\neq 1)$

إذن $D_{f_1}=\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$

و $D_{f_1}\cap I=]-\infty,-1[\cup]-1,1[$

ولدينا $x\in D_{f_2}\Leftrightarrow (x\in\mathbb{R}$ و $3x-1\neq 0)$

$\Leftrightarrow (x\in\mathbb{R}$ و $x\neq\frac{1}{3})$

إذن $D_{f_2}=\mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{3}\}$

و $D_{f_2}\cap J=[1,+\infty[$

وبالتالي $D_f=]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup[1,+\infty[$

أي $D_f=]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$

2) نهايات f عند محدات D_f

- لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3-4x^2+2x+1}{x^2-1}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$

- لدينا $\lim\limits_{x\to-1}x^3-4x^2+2x+1=-6$ و $\lim\limits_{x\to-1}x^2-1=0$

لندرس إشارة x^2-1 .

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

ومنه $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}}f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}}f(x)=-\infty$

- لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$

3) اتصال الدالة f في $x_0=1$.

لدينا $f(1)=-\frac{3}{2}$

ولدينا $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}f(x)=\text{"}\frac{0}{0}\text{"}$ شكل غير محددة

$=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{(x-1)(x^2-3x-1)}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{x^2-3x-1}{x+1}=-\frac{3}{2}$

إذن $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)=f(1)$ ومنه f متصلة على اليسار في $x_0=1$

لدينا $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\frac{x-4}{3x-1}=-\frac{3}{2}$

إذن $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)=f(1)$ ومنه f متصلة على اليمين في $x_0=1$

وبالتالي f متصلة في $x_0=1$.

4) دراسة إتصال الدالة f على D_f .

* لدينا f متصلة في $x_0=1$
* لندرس اتصال الدالة f على كل من $]1,+\infty[$ و $]-\infty,-1[\cup]-1,1[$

• بما أن الدالة $x\mapsto\frac{x^3-4x^2+2x+1}{x^2-1}$ متصلة على $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$

لأنها دالة جذرية فإنها متصلة على $]-\infty,-1[\cup]-1,1[$

ومنه الدالة f متصلة على $]-\infty,-1[\cup]-1,1[$.

• بما أن الدالة $x\mapsto\frac{x-4}{3x-1}$ متصلة على $\mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{3}\}$

لأنها دالة جذرية فإنها متصلة على $]1,+\infty[$

وبالتالي الدالة f متصلة على D_f .

20

حدد النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan3x}{\sin2x}$ 2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{5\tan x-\sin x}{3x}$

3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin2x-2\sin x}{x^2}$ 4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$

تذكير

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=1$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$

Astuce n°02

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin ax}{\tan bx}=\frac{a}{b}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan ax}{\tan bx}=\frac{a}{b}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\frac{a}{b}$

الجواب 1) لدينا $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan3x}{\sin2x}=\frac{3}{2}$

2) لدينا $\lim\limits_{x\to0}\frac{5\tan x-\sin x}{3x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{5}{3}\frac{\tan x}{x}-\frac{1}{3}\frac{\sin x}{x}$

$=\frac{5}{3}-\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$

3) نعلم أن $\sin2x=2\sin x\cos x$

لدينا $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin2x-2\sin x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin x\cos x-2\sin x}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{-2\sin x(1-\cos x)}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}-2x\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}=0\cdot1\cdot\frac{1}{2}$

$=0$

4) نعلم أن $\sin x=\cos x\tan x$

لدينا $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\cos x\tan x}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x}{x}\times\frac{1-\cos x}{x^2}=1\cdot\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{2}$

21

حدد النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{2\sin x-\sqrt{2}}{2\cos x-\sqrt{2}}$ 2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\tan x-\sqrt{3}}{2\sin x-\sqrt{3}}$

3) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sin\pi x}{x-1}$ 4) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sin(x^2-2x)}{x-2}$

Astuce n°03

$\lim\limits_{x\to a} \frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\cos a$; $\lim\limits_{x\to a} \frac{\cos x-\cos a}{x-a}=-\sin a$

$(a\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z})$ $\lim\limits_{x\to a} \frac{\tan x-\tan a}{x-a}=\frac{1}{\cos^2 a}$

الجواب

1) لدينا

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{2\sin x-\sqrt{2}}{2\cos x-\sqrt{2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x-\sin\frac{\pi}{4}}{\cos x-\cos\frac{\pi}{4}}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\sin x-\sin\frac{\pi}{4}}{x-\frac{\pi}{4}}}{\frac{\cos x-\cos\frac{\pi}{4}}{x-\frac{\pi}{4}}}=\frac{\cos\frac{\pi}{4}}{-\sin\frac{\pi}{4}}=-1$$

2) لدينا

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\tan x-\sqrt{3}}{2\sin x-\sqrt{3}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2}\cdot\frac{\tan x-\sqrt{3}}{\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\frac{\tan x-\tan\frac{\pi}{3}}{x-\frac{\pi}{3}}}{\frac{\sin x-\sin\frac{\pi}{3}}{x-\frac{\pi}{3}}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{3}}}{\cos\frac{\pi}{3}}$$

$$=\frac{1}{2\cos^3\frac{\pi}{3}}=4$$

3) لنحدد النهاية $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sin\pi x}{x-1}$

نضع : $t=x-1$ إذن $x=t+1$

و $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sin\pi x}{x-1}=\lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin(t\pi+\pi)}{t}=\lim\limits_{t\to 0} \frac{-\sin t\pi}{t}$

$$=\lim_{t\to 0} -\pi\frac{\sin t\pi}{t\pi}=-\pi$$

4) لدينا $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sin(x^2-2x)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2} x\left(\frac{\sin(x^2-2x)}{x^2-2x}\right)=2$

22

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=x\sin\left(\frac{3}{x}\right) ; & x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

1) بين أن الدالة f متصلة في النقطة $x_0=0$.

2) بين أن الدالة f متصلة على $\mathbb{R}$.

الجواب

تذكير

- $\begin{cases} |u(x)-l|\leq v(x) \\ \lim\limits_{x\to x_0} v(x)=0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} u(x)=l$

- لتكن f و g دالتين معرفتين على مجالين I و J على التوالي . بحيث : $f(I)\subset J$.

$\begin{cases} f \text{ متصلة على } I \\ g \text{ متصلة على } J \end{cases} \Rightarrow gof \text{ متصلة على } I$

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l \\ g \text{ متصلة في } l \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} (gof)(x)=g(l)$

1) ليكن x عنصراً من $\mathbb{R}^*$ لدينا

$|f(x)| = |x\sin(\frac{3}{x})|$

$= |x||\sin(\frac{3}{x})|$

بما أن $|\sin(\frac{3}{x})| \leq 1$ فإن $|x||\sin(\frac{3}{x})| \leq |x|$

ومنه $|f(x)| \leq |x|$

وبما أن $\lim_{x\to 0}|x| = 0$ فإن $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$

ومنه f دالة متصلة في $x_0=0$.

2) لنبين أن الدالة f متصلة على $\mathbb{R}$.

- لدينا f متصلة في $x_0=0$.

- لدينا الدالة $f_1: x\mapsto \frac{3}{x}$ متصلة على $\mathbb{R}^*$

و الدالة $f_2: x\mapsto \sin x$ متصلة على $\mathbb{R}$

إذن الدالة $f_2\circ f_1: x\mapsto \sin(\frac{3}{x})$ متصلة على $\mathbb{R}^*$

ولدينا الدالة $f_3: x\mapsto x$ متصلة على $\mathbb{R}^*$

ومنه الدالة $f=f_3\cdot(f_2\circ f_1)$ متصلة على $\mathbb{R}^*$

وبالتالي الدالة f متصلة على $\mathbb{R}$.

23

نعتبر الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي:

$$f(x)=\sqrt{\sin^2x+2\sin x+3}$$

1) حدد حيز تعريف الدالة f : D_f .

2) ادرس اتصال الدالة f على D_f .

الجواب 1) لدينا $x\in D_f \Leftrightarrow (x\in\mathbb{R}$ و $\sin^2x+2\sin x+3\geq 0)$

$\Leftrightarrow (x\in\mathbb{R}$ و $(\sin x+1)^2+2\geq 0)$

ومنه $D_f=\mathbb{R}$

2) اتصال الدالة f على $\mathbb{R}$.

لدينا الدالة $f_1: x\mapsto \sin^2x+2\sin x+3$ متصلة على $\mathbb{R}$.

و $f_1(\mathbb{R})\subset\mathbb{R}^+$

ولدينا الدالة $f_2: x\mapsto\sqrt{x}$ متصلة على $\mathbb{R}^+$

ومنه الدالة $f=f_2\circ f_1$ متصلة على $\mathbb{R}$.

24

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي:

$$f(x)=\frac{\sqrt{3+\cos x}-2}{x^2}$$

1) حدد حيز تعريف الدالة f : D_f

2) بين أن $|f(x)|<\frac{1}{x^2}$ $(\forall x\in D_f)$

3) استنتج $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

الجواب 1) لدينا $x\in D_f \Leftrightarrow (x\in\mathbb{R}$ و $x^2\neq 0$ و $3+\cos x\geq 0)$

$\Leftrightarrow (x\in\mathbb{R}$ و $x\neq 0$ و $\cos x\geq -3)$

$\Leftrightarrow (x\in\mathbb{R}$ و $x\neq 0)$ لأن $\cos x\geq -1$ لكل x من $\mathbb{R}$

ومنه $D_f=\mathbb{R}^*$

2) لنبين أن $|f(x)|<\frac{1}{x^2}$ $(\forall x\in\mathbb{R}^*)$

لكل x من $\mathbb{R}^*$ لدينا

$-1\leq\cos x\leq 1$

$2\leq 3+\cos x\leq 4$

$\sqrt{2}\leq\sqrt{3+\cos x}\leq 2$

$\sqrt{2}-1\leq\sqrt{3+\cos x}-2\leq 0$

إذن $-1<\sqrt{3+\cos x}-2<1$

أي $|\sqrt{3+\cos x}-2|<1$

إذن $\frac{|\sqrt{3+\cos x}-2|}{x^2}<\frac{1}{x^2}$ (لأن $x^2>0$)

ومنه $|f(x)|<\frac{1}{x^2}$ $(\forall x\in\mathbb{R}^*)$

3) بما أن لكل x من $\mathbb{R}^*$ $|f(x)| < \frac{1}{x^2}$ و $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

فإن $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

25 نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي :

$$f(x)=\frac{x\sqrt{3-x}}{2+\sin\frac{1}{x}}$$

1) حدد حيز تعريف الدالة f : D_f

2) أ- بين أن $(\forall x\in]-1,1[\setminus\{0\})\quad |f(x)|\leq 2|x|$

ب- استنتج تمديدا بالإتصال للدالة f في $x_0=0$.

3) احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

__الجواب__ لدينا $x\in D_f \Leftrightarrow (x\in\mathbb{R}$ و $x\neq 0$ و $2+\sin\frac{1}{x}\neq 0$ و $3-x\geq 0)$

$\Leftrightarrow (x\in\mathbb{R}$ و $x\neq 0$ و $x\leq 3)$ لأن لكل x من $\mathbb{R}$ $2+\sin\frac{1}{x}\neq 0$

ومنه $D_f=]-\infty,0[\cup]0,3]$

2) أ- لنبين أن $(\forall x\in]-1,1[\setminus\{0\})\quad |f(x)|\leq 2|x|$

ليكن $-1<x<1$ و $x\neq 0$

إذن $2<3-x<4$ و $-1<\sin\frac{1}{x}<1$

$\sqrt{2}<\sqrt{3-x}<2$ و $1<2+\sin\frac{1}{x}<3$

$|\sqrt{3-x}|<2$ و $\frac{1}{3}<\frac{1}{2+\sin\frac{1}{x}}<1$

$|x||\sqrt{3-x}|<2|x|$ و $\left|\frac{1}{2+\sin\frac{1}{x}}\right|<1$

ومنه $\frac{|x||\sqrt{3-x}|}{|2+\sin\frac{1}{x}|}<2|x|$

أي $(\forall x\in]-1,1[\setminus\{0\})\quad |f(x)|<2|x|$

ب- لدينا $0\notin D_f$.

بما أن لكل x من $]-1,1[\setminus\{0\}$ $|f(x)|<2|x|$ و $\lim_{x\to 0} 2|x|=0$

فإن $\lim_{x\to 0} f(x)=0\in\mathbb{R}$

ومنه f تقبل تمديدا بالإتصال في $x_0=0$ ؛ الدالة g المعرفة بمايلي :

$$\begin{cases} g(x)=\dfrac{x\sqrt{3-x}}{2+\sin\frac{1}{x}} \; ; \; x\in D_f \\ g(0)=0 \end{cases}$$

3) لنحدد $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

لدينا $\lim_{x\to-\infty} x\sqrt{3-x}=-\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$

وبما أن الدالة $x\mapsto \sin x$ متصلة في 0

فإن $\lim_{x\to-\infty}\sin\frac{1}{x}=\sin 0=0$.

ومنه $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\sqrt{3-x}}{2+\sin\frac{1}{x}}=-\infty$

26 نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $]0,+\infty[$ بمايلي : $f(x)=\frac{2x+\cos x}{1+x}$

1) بين أن لكل x من $]0,+\infty[$ $\frac{2x-1}{1+x}\leq f(x)\leq\frac{2x+1}{1+x}$

2) استنتج $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

تذكير

$$\begin{cases} u(x)\leq f(x)\leq v(x) \\ \lim_{x\to x_0} u(x)=\lim_{x\to x_0} v(x) \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)=\ell$$

$$\begin{cases} u(x)\leq f(x) \\ \lim_{x\to x_0} u(x)=+\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$$

$$\begin{cases} f(x) \leq v(x) \\ \lim\limits_{x \to x_0} v(x) = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

الجواب 1) ليكن x من $]0,+\infty[$ لدينا

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

$$2x-1 \leq 2x+\cos x \leq 2x+1$$

بما أن $1+x>0$ فإن $\frac{2x-1}{1+x} \leq \frac{2x+\cos x}{1+x} \leq \frac{2x+1}{1+x}$

ومنه $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$ $\frac{2x-1}{1+x} \leq f(x) \leq \frac{2x+1}{1+x}$

2) لكل x من $\mathbb{R}_+^*$ لدينا $\frac{2x-1}{1+x} \leq f(x) \leq \frac{2x+1}{1+x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{1+x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x}{x} = 2$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x-1}{1+x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x}{x} = 2$

فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$

27 لتكن f دالة عددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بحيث:

$$x - \frac{x^3}{3} \leq f(x) \leq x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$$

1) احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \frac{f(x)-x}{x^3}$.

2) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) + \frac{x^3}{3}$.

الجواب 1) لدينا $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$ $x - \frac{x^3}{3} \leq f(x) \leq x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$

بما أن $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} x - \frac{x^3}{3} = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} = 0$

فإن $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} f(x) = 0$.

ولدينا $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$ $-\frac{x^3}{3} \leq f(x) - x \leq -\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$

$$-\frac{1}{3} \leq \frac{f(x)-x}{x^3} \leq -\frac{1}{3} + \frac{x^2}{5}$$

وبما أن $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} -\frac{1}{3} = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} -\frac{1}{3} + \frac{x^2}{5} = -\frac{1}{3}$

فإن $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \frac{f(x)-x}{x^3} = -\frac{1}{3}$

3) لدينا $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$ $x \leq f(x) + \frac{x^3}{3} \leq x + \frac{x^5}{5}$

وبما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) + \frac{x^3}{3} = +\infty$.

28 نعتبر الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي:

$$f(x) = \frac{\sqrt{3}\tan x - 1}{\sqrt{3} + \tan x}$$

1) حدد حيز تعريف الدالة f : D_f.

2) بين أن لكل x من D_f: $f(x) = \tan(x - \frac{\pi}{6})$

3) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{6})$

4) احسب $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3}\tan x - 1}{(6x-\pi)(\sqrt{3}+\tan x)}$

الجواب 1) لدينا $x \in D_f \Leftrightarrow (x \in \mathbb{R} ;\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ و $\sqrt{3} + \tan x \neq 0)$

$\Leftrightarrow (x \in \mathbb{R} ;\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ و $\tan x \neq -\sqrt{3})$

$\Leftrightarrow (x \in \mathbb{R} ;\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k\in\mathbb{Z} ;\ \tan x \neq \tan -\frac{\pi}{3})$

$\Leftrightarrow (x \in \mathbb{R} ;\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi ;\ x \neq -\frac{\pi}{3} + k\pi \ /\ k\in\mathbb{Z})$

ومنه $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2}+k\pi \, , -\frac{\pi}{3}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z} \right\}$

2) لنبين أن: $(\forall x\in D_f)\quad f(x)=\tan\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

ليكن x من D_f لدينا

$$f(x)=\frac{\sqrt{3}\tan x-1}{\sqrt{3}+\tan x}$$

$$=\frac{\tan x-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}\tan x}=\frac{\tan x-\tan\frac{\pi}{6}}{1+\tan\frac{\pi}{6}\tan x}=\tan\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$$

3) لنحل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

ليكن x عنصراً من D_f لدينا $f(x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

$$\iff \tan\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\iff \tan\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=0$$

$$\iff \tan\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\tan\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=0$$

$$\iff \tan\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\left(1-\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right)=0$$

$\iff \tan\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=0$ أو $1-\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=0$

$\iff \tan\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=0$ أو $\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=1$

$\iff x-\frac{\pi}{6}=k\pi$ أو $x-\frac{\pi}{6}=2k\pi \quad / k\in\mathbb{Z}$

$\iff x=\frac{\pi}{6}+k\pi$ أو $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \quad / k\in\mathbb{Z}$

$\iff x=\frac{\pi}{6}+k\pi \quad / k\in\mathbb{Z}$

ومنه $S=\left\{\frac{\pi}{6}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$

4) لدينا

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sqrt{3}\tan x-1}{(6x-\pi)(\sqrt{3}+\tan x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{f(x)}{6\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\tan\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{x-\frac{\pi}{6}}\times\frac{1}{6}$$

$$=1\times\frac{1}{6}$$

$$=\frac{1}{6}$$

صورة مجال بدالة متصلة

$\begin{cases} I \text{ مجال من } \mathbb{R} \\ f \text{ متصلة على } I \end{cases} \Rightarrow f(I) \text{ مجال من } \mathbb{R}$

f متصلة على $[a;b]$ $\Rightarrow f([a;b])=[m;M]$

m: القيمة الدنوية و M: القيمة القصوية لـ f على $[a;b]$

$\begin{cases} f \text{ متصلة على } [a;b] \\ f \text{ تزايدية على } [a;b] \end{cases} \Rightarrow f([a;b])=[f(a);f(b)]$

$\begin{cases} f \text{ متصلة على } [a;b] \\ f \text{ تناقصية على } [a;b] \end{cases} \Rightarrow f([a;b])=[f(b);f(a)]$

$$y\in f(I) \iff \exists x\in I : y=f(x)$$

صورة مجال بدالة متصلة ورتيبة عليه

رتابة f على I ← / المجال I ↓	f تزايدية على المجال I	f تناقصية على المجال I
	$f(I)$	$f(I)$
$]a;b[$	$]\lim_{x\to a^+} f(x); \lim_{x\to b^-} f(x)[$	$]\lim_{x\to b^-} f(x); \lim_{x\to a^+} f(x)[$
$[a;b[$	$[f(a); \lim_{x\to b^-} f(x)[$	$]\lim_{x\to b^-} f(x); f(a)]$
$]a;b]$	$]\lim_{x\to a^+} f(x); f(b)]$	$[f(b); \lim_{x\to a^+} f(x)[$
$]a;+\infty[$	$]\lim_{x\to a^+} f(x); \lim_{x\to +\infty} f(x)[$	$]\lim_{x\to +\infty} f(x); \lim_{x\to a^+} f(x)[$
$[a;+\infty[$	$[f(a); \lim_{x\to +\infty} f(x)[$	$]\lim_{x\to +\infty} f(x); f(a)]$
$]-\infty;a[$	$]\lim_{x\to -\infty} f(x); \lim_{x\to a^-} f(x)[$	$]\lim_{x\to a^-} f(x); \lim_{x\to -\infty} f(x)[$
$]-\infty;a]$	$]\lim f(x); f(a)]$	$[f(a); \lim_{x\to a^-} f(x)[$
$]-\infty;-\infty[$	$]\lim_{x\to -\infty} f(x); \lim_{x\to +\infty} f(x)[$	$]\lim_{x\to +\infty} f(x); \lim_{x\to -\infty} f(x)[$

29

حدد صورة المجال I بالدالة f في كل من الحالات التالية :

1) $f(x) = x^2$ و $I = [-1;2]$

2) $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ و $I = [-1;1]$

<u>الجواب</u> 1) لدينا $f(x) = x^2$ و $I = [-1;2]$

f دالة متصلة على $\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية و بالخصوص على المجال I .

ولدينا $f'(x) = 2x$ $(\forall x \in I)$

جدول تغيرات الدالة f على I هو :

x	-1		0		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↘	0	↗	4

بما أن f متصلة على $[-1;2]$ فإن $f([-1;2]) = [m;M]$

وحيث : $M = 4$ هي القيمة القصوية و $m = 0$ هي القيمة الدنوية لـ f على $[-1;0]$

فإن $f([-1;2]) = [0;4]$.

2) لدينا $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$ و $I = [-1;1]$

f دالة متصلة على $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ (لأنها دالة جذرية) وبالخصوص على المجال I

ولكل x من I : $f'(x) = -\frac{3}{(x-2)^2} < 0$ إذن f تناقصية على I .

ومنه فإن $f(I) = f([-1;1]) = [f(1); f(-1)] = [-2;0]$

30

حدد صورة المجال I بالدالة f في كل من الحالات التالية :

1) $f(x) = x^2 - 2x + 1$ و $I = \mathbb{R}$

2) $\begin{cases} f(x) = 2x - 4 & ; x \in]0;2[\\ f(x) = -2x + 4 & ; x \in [2;3[\end{cases}$ و $I =]0;3[$

ومنه $f(\mathbb{R}) = [0,+\infty[$

2) لنبين أن الدالة f متصلة على المجال $I =]0,3[$.

لدينا f متصلة على المجال $]0,2[$ لأنها قصور لدالة حدودية .

f متصلة على المجال $]2,3[$ لأنها قصور لدالة حدودية .

لندرس اتصال الدالة f في النقطة $x_0 = 2$.

لدينا $f(2) = 0$

و $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} 2x - 4 = 0 = f(2)$

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} -2x + 4 = 0 = f(2)$

إذن $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = f(2)$

ومنه f متصلة في النقطة $x_0 = 2$.

وبالتالي f متصلة على المجال $]0,3[$.

على المجال $]0,2[$ لدينا $f'(x) = 2$

إذن f تزايدية قطعا على $]0,2[$

على المجال $]2,3[$ لدينا $f'(x) = -2$

إذن f تناقصية قطعا على $]2,3[$.

ومنه جدول تغيرات الدالة f

x	0		2		3
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	−4	↗	0	↘	−2

ومنه

$$f(]0,3[) = f(]0,2] \cup [2,3[)$$
$$= f(]0,2]) \cup f([2,3[)$$
$$=]\lim_{x \to 0^+} f(x), f(2)] \cup]\lim_{x \to 3^-} f(x), f(2)]$$
$$=]-4,0] \cup]-2,0]$$
$$=]-4,0]$$

31 نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي :

$$f(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 - \frac{1}{4}$$

حدد صورة المجال $I = [-1,+\infty[$ بالدالة f .

الجواب

f دالة حدودية فهي متصلة على $\mathbb{R}$ وبالخصوص على I.

لدينا $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f'(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$

$= x(x^2 - 3x + 2)$

$= x(x-1)(x-2)$

ومنه جدول تغيرات الدالة f.

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
x		−	0	+		+		+	
x^2-3x+2		+		+	0	−	0	+	
$f'(x)$		−	0	+	0	−	0	+	
$f(x)$	2	↘	$-1/4$	↗	0	↘	$-1/4$	↗	$+\infty$

ومنه $f([-1,+\infty[) = [-\frac{1}{4},+\infty[$

32 نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي :

$$f(x) = \cos^3 x - \frac{3}{2}\cos x$$

1) بين أن الدالة f متصلة على المجال $I = [0,\frac{\pi}{4}]$

2) حدد صورة المجال I بالدالة f .

تذكير

كل دالة مثلثية متصلة على حيز تعريفها .

الدالتين $x \mapsto \sin x$ و $x \mapsto \cos x$ متصلتين على $\mathbb{R}$.

الدالة $x \mapsto \tan x$ متصلة على $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.

الجواب 1) نضع $u(x)=\cos^3 x$ و $v(x)=-\frac{3}{2}\cos x$

لدينا u متصلة على $\mathbb{R}$ لأنها دالة مثلثية وبالخصوص على $[0,\frac{\pi}{4}]$

v متصلة على $\mathbb{R}$ لأنها دالة مثلثية وبالخصوص على $[0,\frac{\pi}{4}]$

بما أن $f=u+v$ فإن f متصلة على $[0,\frac{\pi}{4}]$.

تذكير

$n\in\mathbb{N}^*$ ، $\forall x\in\mathbb{R}$

$$\begin{cases}(\cos^n x)' = -n\cos^{n-1}x\sin x\\ (\sin^n x)' = n.\sin^{n-1}x\cos x\end{cases}$$

$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\}$ $\quad (\tan^n x)' = n\tan^{n-1}x(1+\tan^2 x)$

2) ليكن x عنصرا من $[0,\frac{\pi}{4}]$ لدينا

$$\begin{aligned} f'(x) &= -3\cos^2 x\sin x + \frac{3}{2}\sin x\\ &= 3\sin x\left(\frac{1}{2}-\cos^2 x\right)\\ &= 3\sin x\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\cos x\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\cos x\right)\end{aligned}$$

لكل x من $[0,\frac{\pi}{4}]$ $\cos x>0$ و $\sin x\geq 0$

ومنه $3\sin x\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\cos x\right)\geq 0$

إذن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $\frac{\sqrt{2}}{2}-\cos x$

لنحدد إشارة $\frac{\sqrt{2}}{2}-\cos x$.

$0\leq x\leq\frac{\pi}{4} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{4}\leq\cos x\leq\cos 0$

(لأن الدالة $x\mapsto\cos x$ تناقصية على $[0,\frac{\pi}{4}]$)

ومنه $\frac{\sqrt{2}}{2}\leq\cos x\leq 1$ (لأن $\cos 0=1$ و $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$)

إذن $\frac{\sqrt{2}}{2}-\cos x\leq 0$

ومنه $f'(x)\leq 0$

إذن f تناقصية على $[0,\frac{\pi}{4}]$

ومنه $f([0,\frac{\pi}{4}]) = [f(\frac{\pi}{4}), f(0)]$

تذكير

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	2π
$\sin x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	0
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1	1
$\tan x$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	0

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos^3\frac{\pi}{4}-\frac{3}{2}\cos\frac{\pi}{4} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3-\frac{3}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f(0) = \cos^3 0-\frac{3}{2}\cos 0 = 1-\frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$$

ومنه $f([0,\frac{\pi}{4}]) = [-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{2}]$.

33 نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي :

$$f(x) = 4\sin x+\cos 2x$$

حدد صورة المجال $I=[0,\pi]$ بالدالة f .

الجواب لدينا f متصلة على المجال I كمجموع لدالتين متصلتين على المجال I .

ولدينا $\forall x\in[0,\pi]$ $\quad f'(x) = 4\cos x-2\sin 2x$

تذكير

$$(\cos(ax+b))' = -a\sin(ax+b)$$
$$(\sin(ax+b))' = a\cos(ax+b)$$
$$(\tan(ax+b))' = a(1+\tan^2(ax+b))$$
$$\sin 2x = 2\cos x\sin x$$
$$\cos 2x = \cos^2 x-\sin^2 x = 2\cos^2 x-1 = 1-2\sin^2 x$$
$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

ومنه $\forall x\in[0,\pi]\quad f'(x)=4\cos x-4\cos x\sin x$

$$=4\cos x(1-\sin x)$$

بما أن $\forall x\in[0,\pi]\quad 1-\sin x\geq 0$

فإن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $\cos x$.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	1

ومنه $f([0,\pi])=[1,3]$

34 نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي :

$$f(x)=x+1+\frac{4}{x^2}$$

حدد صورة المجال $I=]0,+\infty[$ بالدالة f .

الجواب

لدينا f دالة جذرية فهي متصلة على حيز تعريفها $D_f=\mathbb{R}^*$ وبالخصوص على المجال I (لأن $I\subset D_f$)

ولدينا $\forall x\in I\quad f'(x)=1-\frac{8}{x^3}=\frac{x^3-8}{x^3}$

إذن إشارة $f'(x)$ هي إشارة x^3-8

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

ومنه $f(]0,+\infty[)=]4,+\infty[$

مبرهنة القيم الوسطية

- مبرهنة القيم الوسطية (الصيغة 1):

$$\begin{cases} f \text{ متصلة على } [a;b] \\ \lambda\in f([a;b]) \end{cases} \Longrightarrow \exists\alpha\in[a;b] : \lambda=f(\alpha)$$

- مبرهنة القيم الوسطية (الصيغة 2):

$$\begin{cases} f \text{ متصلة على } [a;b] \\ f(a)f(b)\leq 0 \end{cases} \Longrightarrow \exists\alpha\in[a;b] : f(\alpha)=0$$

- $\begin{cases} f \text{ متصلة على } [a;b] \\ f(a)f(b)<0 \end{cases} \Longrightarrow$ المعادلة : $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا في المجال $]a;b[$

- $\begin{cases} f \text{ متصلة على } [a;b] \\ f \text{ رتيبة قطعا على } [a;b] \\ f(a)f(b)<0 \end{cases} \Longrightarrow$ المعادلة : $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]a;b[$

أخطاء شائعة

$\begin{cases} f \text{ متصلة على } [a;b] \\ f(a)f(b)>0 \end{cases} \not\Longrightarrow$ المعادلة : $f(x)=0$ لا تقبل حلا في $[a;b]$.

يمكن أن تكون للمعادلة : $f(x)=0$ حلا وحيدا دون أن تكون الدالة f رتيبة قطعا .

35 بين أن المعادلة $x^5-3x^4+x^2-1=0$ لها على الأقل حلاً في المجال $[0,3]$.

الجواب نضع $f(x)=x^5-3x^4+x^2-1$

لدينا f دالة حدودية، متصلة على $\mathbb{R}$ وبالخصوص على المجال $[0,3]$.

ولدينا $f(0)=-1$ و $f(3)=8$

بما أن $f(0)f(3)<0$ فإنه حسب مبرهنة الوسيطية المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلاً في $]0,3[$.

36 بين أن المعادلة $-x^3+x+1=0$ تقبل حلاً وحيداً في المجال $[1,2]$.

الجواب نضع $g(x)=-x^3+x+1$

لدينا g دالة متصلة على $\mathbb{R}$ (لأنها دالة حدودية) وبالخصوص على المجال $[1,2]$.

ولدينا $g(1)=1$ و $g(2)=-5$

إذن $g(1)g(2)<0$

لدينا $\forall x\in[1,2] \quad g'(x)=-3x^2+1<0$

إذن g تناقصية قطعاً على $[1,2]$

وبالتالي حسب مبرهنة القيم الوسيطية المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً في المجال $[1,2]$.

37 بين أن المعادلة $\frac{1}{2}\cos x=\frac{1}{(x+1)^2}$ تقبل على الأقل حلاً في المجال $[2\pi,3\pi]$.

الجواب نضع $f(x)=\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{(x+1)^2}$

لدينا f دالة متصلة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ وبالخصوص على $[2\pi,3\pi]$

ولدينا $f(3\pi)=-\frac{1}{2}-\frac{1}{(3\pi+1)^2}<0$ و $f(2\pi)=\frac{1}{2}-\frac{1}{(2\pi+1)^2}>0$

إذن $f(2\pi)f(3\pi)<0$

فحسب مبرهنة القيم الوسيطية المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلاً في المجال $]2\pi,3\pi[$

أي المعادلة $\frac{1}{2}\cos x=\frac{1}{(x+1)^2}$ تقبل على الأقل حلاً في $[2\pi,3\pi]$

38 نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي:

$$f(x)=\tan x-x-1$$

1) بين أن f دالة متصلة على المجال $[0,\frac{\pi}{2}[$.

2) بين أن f دالة تزايدية قطعاً على المجال $[0,\frac{\pi}{2}[$.

3) حدد صورة المجال $[0,\frac{\pi}{2}[$ بالدالة f.

4) استنتج أن $\exists!\alpha\in]0,\frac{\pi}{2}[\; : \tan\alpha=\alpha+1$

الجواب 1) بما أن الدالتين $f_1:x\mapsto\tan x$ و $f_2:x\mapsto -x-1$ متصلتين على المجال $[0,\frac{\pi}{2}[$ فإن الدالة $f=f_1+f_2$ متصلة على المجال $[0,\frac{\pi}{2}[$.

2) لدينا $\forall x\in[0,\frac{\pi}{2}[\quad f'(x)=1+\tan^2x-1$

$f'(x)=\tan^2x\geq 0$

ومنه f دالة تزايدية قطعاً على المجال $[0,\frac{\pi}{2}[$.

3) لدينا f دالة متصلة وتزايدية قطعاً على $[0,\frac{\pi}{2}[$

إذن $f([0,\frac{\pi}{2}[)=[f(0),\lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}}f(x)[$

$f([0,\frac{\pi}{2}[)=[-1,+\infty[$

4) بما أن f دالة متصلة وتزايدية قطعاً على $[0,\frac{\pi}{2}[$

و $0 \in f([0,\frac{\pi}{2}[) = [-1,+\infty[$

فإنه حسب مبرهنة القيم الوسيطية

$\exists! \alpha \in [0,\frac{\pi}{2}[\quad : \quad f(\alpha)=0$

أي $\exists! \alpha \in [0,\frac{\pi}{2}[\quad : \quad \tan\alpha = \alpha+1$

39

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي:

$$f(x)=4x^3-3x-\frac{1}{2}$$

1) ادرس تغيرات الدالة f .

2) استنتج أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل ثلاث حلول على $\mathbb{R}$

الجواب 1) لدينا $f(x)=4x^3-3x-\frac{1}{2}$

$f'(x)=3(4x^2-1)$

$f'(x)=3(2x-1)(2x+1)$

ومنه جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$		$-1/2$		$1/2$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$1/2$	↘	$-3/2$	↗	$+\infty$

2) لدينا f دالة متصلة على $\mathbb{R}$ حسب مبرهنة القيم الوسيطة

$0\in f(]-\infty,-\frac{1}{2}])=]-\infty,\frac{1}{2}] \Rightarrow \exists\alpha\in]-\infty,-\frac{1}{2}] : f(\alpha)=0$

$0\in f([-\frac{1}{2},\frac{1}{2}])=[-\frac{3}{2},\frac{1}{2}] \Rightarrow \exists\beta\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}] : f(\beta)=0$

$0\in f([\frac{1}{2},+\infty[)=[-\frac{3}{2},+\infty[\Rightarrow \exists\gamma\in[\frac{1}{2},+\infty[: f(\gamma)=0$

وبالتالي المعادلة $f(x)=0$ تقبل ثلاث حلول على $\mathbb{R}$

40

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي:

$$f(x)=\cos^3x-3\cos x+2$$

1) ادرس تغيرات الدالة f على المجال $[0,\pi]$.

2) استنتج أن $\exists! \alpha\in[0,\pi] \quad f(\alpha)=\sqrt{2}$

الجواب 1) لدينا $f(x)=\cos^3x-3\cos x+2 \quad x\in[0,\pi]$

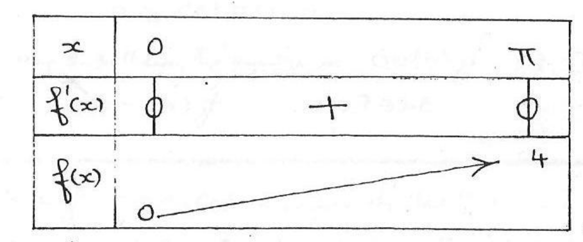
$f'(x)=3\cos^2x(-\sin x)+3\sin x$

$f'(x)=3\sin x(1-\cos^2x)$

$f'(x)=3\sin x\sin^2x$

$f'(x)=3\sin^3x$

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $\sin x$ ومنه جدول تغيرات f



x	0		π
$f'(x)$	0	+	0
$f(x)$	0	↗	4

بما أن f متصلة وتزايدية قطعا على المجال $[0,\pi]$

و $\sqrt{2}\in f([0,\pi])=[0,4]$

فإنه حسب مبرهنة القيم الوسيطية

$\exists!\alpha\in[0,\pi] \ : \ f(\alpha)=\sqrt{2}$

41

نعتبر f دالة عددية متصلة على المجال $[0,1]$ بحيث:

$$f([0,1]) = [0,1]$$

نضع $g(x) = f(x) - x \quad \forall x \in [0,1]$

1) بين أن $g(0)g(1) \leq 0$

2) استنتج أن $\exists \alpha \in [0,1] \quad f(\alpha) = \alpha$

الجواب 1) لدينا $g(0) = f(0) - 0 = f(0) \geq 0$ (لأن $f([0,1]) = [0,1]$)

$g(1) = f(1) - 1 \leq 0$

ومنه $g(0)g(1) \leq 0$.

2) بما أن الدالتين $f: x \mapsto f(x)$ و $f_1: x \mapsto -x$ متصلتين على المجال $[0,1]$ فإن الدالة $g = f + f_1$ متصلة على المجال $[0,1]$

ولدينا $g(0)g(1) \leq 0$

فحسب مبرهنة القيم الوسيطية: $\exists \alpha \in [0,1] : g(\alpha) = 0$

أي $\exists \alpha \in [0,1] \quad f(\alpha) = \alpha$

42

لتكن f دالة عددية متصلة على المجال $[0,1]$ بحيث: $\forall x \in [0,1] \quad 1 < f(x) \leq 2$

ولتكن g الدالة العددية المعرفة على المجال $[0,1]$ بمايلي: $g(x) = x f(x) - 1$

1) بين أن الدالة g متصلة على المجال $[0,1]$.

2) حدد إشارة كل من $g(0)$ و $g(1)$.

3) استنتج أن $\exists c \in]0,1[\quad f(c) = \frac{1}{c}$

الجواب 1) بما أن الدالتين $f: x \mapsto f(x)$ و $g_1: x \mapsto x$ متصلتين على $[0,1]$ فإن الدالة $g: x \mapsto x f(x) - 1$ متصلة على $[0,1]$

2) لدينا $g(0) = 0 \cdot f(0) - 1 = -1 < 0$

$g(1) = 1 \cdot f(1) - 1 = f(1) - 1 > 0$ (لأن $1 < f(1) \leq 2$)

3) بما أن g دالة متصلة على $[0,1]$ و $g(0)g(1) < 0$ فإنه حسب مبرهنة القيم الوسيطية

$\exists c \in]0,1[\quad g(c) = 0$

أي $\exists c \in]0,1[\quad c \cdot f(c) - 1 = 0$

أي $\exists c \in]0,1[\quad f(c) = \frac{1}{c}$

43

لتكن f دالة عددية متصلة على المجال $[0,1]$

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $[0,1]$ بمايلي:

$$g(x) = x(x-1)f(x) - 2x + 1$$

1) بين أن الدالة g متصلة على المجال $[0,1]$.

2) احسب $g(0)g(1)$

3) استنتج أن $\exists \alpha \in]0,1[\quad f(\alpha) = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha - 1}$

الجواب 1) بما أن الدوال $f: x \mapsto f(x)$ و $x \mapsto x(x-1)$ و $g_2: x \mapsto -2x+1$ متصلة على $[0,1]$ فإن الدالة $g = g_1 f + g_2$ متصلة على $[0,1]$

2) لدينا $g(0) = 1$ و $g(1) = -1$

ومنه $g(0)g(1) = -1$

3) بما أن g دالة متصلة على $[0,1]$ و $g(0)g(1) < 0$ فإنه حسب مبرهنة القيم الوسيطية

$\exists \alpha \in]0,1[\quad g(\alpha) = 0$

$\exists \alpha \in]0,1[\quad \alpha(\alpha-1)f(\alpha) - 2\alpha + 1 = 0$

$\exists \alpha \in]0,1[\quad f(\alpha) = \frac{-1+2\alpha}{\alpha(\alpha-1)} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha-1}$

44 ليكن p و q عددين من $\mathbb{R}_+^*$ و لتكن f دالة عددية متصلة على المجال $[0,1]$ بحيث : $f(0) \neq f(1)$

نعتبر الدالة العددية g والمعرفة على المجال $[0,1]$ بمايلي :

$$g(x) = f(x) - \frac{pf(0)+qf(1)}{p+q}$$

1) بين أن الدالة g متصلة على المجال $[0,1]$.

2) حدد إشارة الجداء $g(0)g(1)$.

3) بين أن $\exists c \in]0,1[\quad f(c) = \frac{pf(0)+qf(1)}{p+q}$

الجواب

1) بما أن الدالتين $h : x \mapsto \frac{pf(0)+qf(1)}{p+q}$ و $f : x \mapsto f(x)$ متصلتين على المجال $[0,1]$ فإن الدالة $g = f+h$ متصلة على المجال $[0,1]$

2) لدينا $g(0) = \frac{q(f(0)-f(1))}{p+q}$ و $g(1) = \frac{p(f(1)-f(0))}{p+q}$

إذن $g(0)g(1) = \frac{-pq}{(p+q)^2}(f(0)-f(1))^2$

3) بما أن g دالة متصلة على $[0,1]$ و $g(0)g(1) < 0$

فإنه حسب مبرهنة القيم الوسيطية

$\exists c \in]0,1[\quad g(c) = 0$

أي $\exists c \in]0,1[\quad f(c) = \frac{pf(0)+qf(1)}{p+q}$

45 لتكن f دالة عددية متصلة على مجال $[a,b]$.

ولتكن x_1 و x_2 و .... و x_n ، n عدداً حقيقياً من المجال $[a,b]$

وليكن $f([a,b]) = [m,M]$

نضع $\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_n)$

1) بين أن $m \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \leq M$

2) استنتج أن $\exists c \in [a,b] \quad f(c) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$

الجواب

1) بما أن $f([a,b]) = [m,M]$

و x_1 و x_2 و .... و x_n أعداداً من $[a,b]$

فإن $m \leq f(x_i) \leq M$ لكل i من $\{1,2,\dots,n\}$

$$\underbrace{m+m+\dots+m}_{n \text{ مرة}} = \sum_{i=1}^{n} m \leq \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} M = \underbrace{M+M+\dots+M}_{n \text{ مرة}}$$

إذن $nm \leq \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \leq nM$

ومنه $m \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \leq M$

3) بما أن f متصلة على المجال $[a,b]$

و $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \in f([a,b])$

فإنه حسب مبرهنة القيم الوسيطية

$\exists c \in [a,b] \quad f(c) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$

46

1) بين أن المعادلة : $x^3+x-1=0$ تقبل حلاً وحيداً α ينتمي الى المجال $]0;1[$.

2) حدد تأطيراً للعدد α سعته $0,25$.

الجواب 1) لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $[0;1]$ بمايلي :

$$f(x)=x^3+x-1$$

الدالة f متصلة على $[0;1]$ (لأنها قصور دالة حدودية)

لدينا $f(1)\times f(0)=1\times -1=-1<0$ حسب مبرهنة القيم الوسيطية المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا في المجال $]0;1[$.

ولكل x من $[0;1]$: $f'(x)=3x^2+1>0$ إذن الدالة f تزايدية قطعا على $[0;1]$

ومنه فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $]0;1[$.

2) لنحدد تأطيراً للعدد α سعته $0,25$ باستعمال طريقة التفرع الثنائي .

* سعة المجال $]0;1[$ هي : 1 .

لنحسب : $f(\frac{0+1}{2})$.

لدينا $f(\frac{0+1}{2})=f(\frac{1}{2})=-\frac{3}{8}$ إذن $f(\frac{1}{2})<0$

بما أن $f(1)>0$ فإن $\frac{1}{2}<\alpha<1$ سعة هذا التأطير هي : $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}=0,5$

نكرر هذه العملية. لنحسب $f(\frac{\frac{1}{2}+1}{2})=f(\frac{3}{4})$

لدينا $f(\frac{3}{4})=\frac{11}{64}>0$ وبما أن $f(\frac{1}{2})<0$ فإن $\frac{1}{2}<\alpha<\frac{3}{4}$

سعة هذا التأطير هي : $\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=0,25$.

47

1) بين أن المعادلة : $x^3-6x^2+6=0$ تقبل حلا وحيداً α ينتمي الى المجال $[0;4]$.

2) حدد تأطيراً للعدد α سعته $0,5$.

الجواب 1) لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $[0;4]$ بمايلي :

$$f(x)=x^3-6x^2+6$$

الدالة f متصلة على $[0;4]$ (لأنها قصور دالة حدودية)

لدينا $f(0)\times f(4)=-156<0$ إذن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلاً في المجال $]0;4[$.

لكل x من $]0;4[$: $f'(x)=3x(x-4)<0$ إذن f تناقصية قطعا على $]0;4[$ ومنه فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α ينتمي الى المجال $]0;4[$.

2) لنحدد تأطيراً للعدد α سعته $0,001$.

* سعة المجال $]0;4[$ هي : 4 .

لدينا $f(\frac{0+4}{2})=f(2)=-10<0$ و $f(0)>0$ إذن $0<\alpha<2$

سعة هذا التأطير هي : 2 .

لدينا $f(\frac{0+2}{2})=f(1)=1>0$ و $f(2)<0$ إذن $1<\alpha<2$

سعة هذا التأطير هي : 1 .

لدينا $f(\frac{1+2}{2})=f(\frac{3}{2})=-4,125<0$ و $f(1)>0$ إذن $1<\alpha<\frac{3}{2}$

سعة هذا التأطير هي : 0,5 .

الدوال العكسية

الدوال العكسية

لتكن f دالة متصلة ورتيبة قطعاً على مجال I

لدينا الخاصيات التالية :

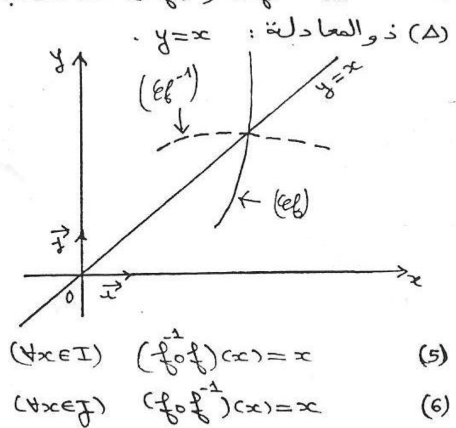
(1) f تقابل من I نحو $f(I)$.

(2) f^{-1} متصلة على $J=f(I)$.

f^{-1} هي الدالة العكسية للدالة f .

(3) الدالتين f و f^{-1} لهما نفس منحى التغير.

(4) المنحنيين (C_f) و $(C_{f^{-1}})$ متماثلان بالنسبة للمستقيم (Δ) ذو المعادلة : $y=x$.



(5) $(f^{-1}\circ f)(x)=x \quad (\forall x\in I)$

(6) $(f\circ f^{-1})(x)=x \quad (\forall x\in J)$

الدوال العكسية : سؤال جواب

سؤال : كيف نبين أن f تقابل من I نحو J ؟

جواب : هناك طريقتين .

طريقة 1 : نبين مايلي :

← f دالة متصلة على المجال I .

← f دالة رتيبة قطعا على المجال I .

طريقة 2 : نبين مايلي :

المعادلة : $y=f(x)$ تقبل حلا وحيدا x من المجال I .

حيث y عدد معلوم من المجال J .

سؤال : كيف نبين أن f تقبل دالة عكسية على المجال I .

جواب : نبين مايلي :

← f متصلة على المجال I .

← f رتيبة قطعا على المجال I .

1 بين أن الدالة f تقابل من I نحو مجال J يتم تحديده في كل من الحالات التالية :

1) $f(x)=2x+1$ ، $I=[-1;+\infty[$

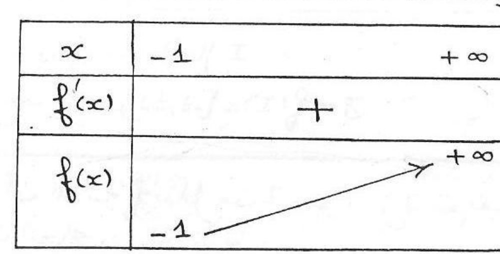
2) $f(x)=\sqrt{x-1}$ ، $I=[1;+\infty[$

3) $f(x)=x^2+2x$ ، $I=[-1;1]$

الجواب 1) لدينا $f(x)=2x+1$ ، $I=[-1;+\infty[$

f دالة متصلة على $\mathbb{R}$ (لأنها دالة حدودية) وبالخصوص على I .

ولدينا $f'(x)=2$ $(\forall x\in I)$



x	-1 $\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	-1 ↗ $+\infty$

ومنه f تزايدية قطعا على المجال $I=[-1,+\infty[$

إذن f تقابل من I نحو $J=f(I)=[-1,+\infty[$

2) لدينا $f(x)=\sqrt{x-1}$

تذكير

إذا كانت u دالة قابلة للإشتقاق على مجال I

و $\forall x\in I \quad u(x)>0$

فإن الدالة $\sqrt{u}$ قابلة للإشتقاق على المجال I

و $\forall x\in I \quad (\sqrt{u(x)})'=\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

f دالة جذرية فهي متصلة على حيز تعريفها $I=[1,+\infty[$

و $\forall x\in I \quad f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}>0$

إذن f تزايدية قطعا على المجال I .

ومنه f تقابل من I نحو $J=f(I)=[0,+\infty[$

3) لدينا $f(x)=x^2+2x$

f دالة حدودية فهي متصلة على $\mathbb{R}$ وبالخصوص على المجال $I=[-1,1]$ و $\forall x\in I \quad f'(x)=2(x+1)$

x	-1 $\quad$ 1
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	-1 ↗ 3

إذن f تزايدية قطعًا على المجال I .

ومنه f تقابل من I نحو $J=f(I)=[-1,3]$

2 بين أن الدالة f تقابل من I نحو مجال J يتم تحديده. في كل من الحالات الآتية :

1) $f(x)=(x^3-2)^3$ و $I=\mathbb{R}$

2) $f(x)=\frac{2x-1}{x-4}$ و $I=]4,+\infty[$

3) $f(x)=x^2+1-\frac{1}{x-1}$ و $I=]1,+\infty[$

الجواب

1) لدينا $f(x)=(x^3-2)^3$

لدينا f دالة حدودية فهي متصلة على $I=\mathbb{R}$

و $\forall x\in I \quad f'(x)=9x^2(x^3-2)^2\geq 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

إذن f دالة تزايدية قطعًا على المجال I

ومنه f تقابل من I نحو $J=f(I)=\mathbb{R}$

2) لدينا $f(x)=\frac{2x-1}{x-4}$

f دالة جذرية فهي متصلة على $D_f=\mathbb{R}\setminus\{4\}$

وبالخصوص على المجال $I=]4,+\infty[$

ولدينا $f'(x)=\frac{-7}{(x-4)^2}<0$

إذن f دالة تناقصية قطعًا على المجال I

ومنه f تقابل من I نحو $J=f(I)=]2,+\infty[$

3) لدينا $f(x)=x^2+1-\frac{1}{x-1}$

f دالة جذرية فهي متصلة على $D_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ وبالخصوص على المجال $I=]1,+\infty[$

ولدينا $\forall x\in I \quad f'(x)=2x+\frac{1}{(x-1)^2}>0$

إذن f دالة تزايدية قطعًا على المجال I .

ومنه f تقابل من I نحو $J=f(I)=]-\infty,+\infty[$.

التقابل العكسي

تذكير

لتكن f دالة متصلة ورتيبة قطعًا على مجال I .

وليكن $J=f(I)$

نعلم أن f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على J .

لدينا $f: I\to J$ و $f^{-1}: J\to I$

بحيث

$$\begin{cases}y=f^{-1}(x)\\x\in J\end{cases}\iff\begin{cases}x=f(y)\\y\in I\end{cases}$$

3 لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x والمعرفة على المجال $I=]-\infty,2]$ المعرفة بما يلي : $f(x)=2x^2-8x+5$

بين أن f تقبل دالة عكسية f^{-1} يتم تحديدها .

الجواب

f دالة حدودية فهي متصلة على المجال $I=]-\infty,2]$

ولدينا $\forall x\in I \quad f'(x)=4x-8\leq 0$

x	$-\infty$ \ 2
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$+\infty$ ↘ 5

إذن f تناقصية قطعًا على المجال I

ومنه f تقابل من I نحو $J=f(I)=[3,+\infty[$

و تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة من J نحو I.

لدينا
$$\begin{cases} x=f(y) \\ y\in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=f^{-1}(x) \\ x\in J \end{cases}$$

$$x=f(y) \Leftrightarrow x=2y^2-8y+5$$
$$\Leftrightarrow x=2(y^2-4y+4)-3$$
$$\Leftrightarrow x+3=2(y-2)^2$$
$$\Leftrightarrow \frac{x+3}{2}=(y-2)^2$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{x+3}{2}}=|y-2|$$
$$\Leftrightarrow 2-y=\sqrt{\frac{x+3}{2}} \quad (\text{لأن } y-2\leq 0)$$
$$\Leftrightarrow y=2-\sqrt{\frac{x+3}{2}}$$

و بالتالي $f^{-1}(x)=2-\sqrt{\frac{x+3}{2}}$ $(\forall x\in J)$

4

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي :

$$f(x)=(\sqrt{x}-\sqrt{2})^2$$

1) ادرس تغيرات الدالة f

2) لتكن g قصور الدالة f على المجال $I=[0,\sqrt{2}]$.

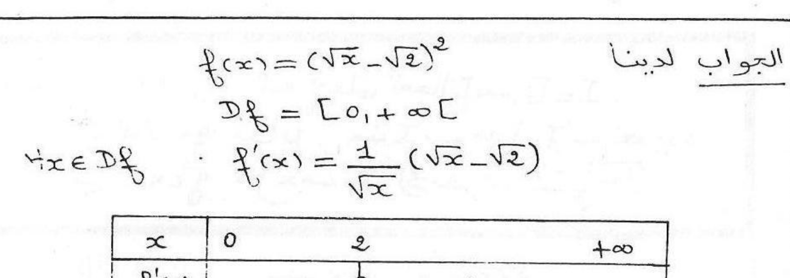
أ- بين أن g تقابل من I نحو مجال J يتم تحديده.

ب- احسب $g^{-1}(x)$ لكل x من J

الجواب لدينا $f(x)=(\sqrt{x}-\sqrt{2})^2$

$D_f=[0,+\infty[$

$\forall x\in D_f \quad f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-\sqrt{2})$



x	0 \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 2 \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ $+\infty$
$f'(x)$	$-$ \ \ 0 \ \ $+$
$f(x)$	2 ↘ 0 ↗ $+\infty$

2) أ- بما أن g متصلة وتناقصية قطعًا على المجال $I=[0,\sqrt{2}]$

فإنها تقابل من I نحو $J=g([0,\sqrt{2}])=[0,2]$

وتقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة من J نحو I.

ب- لدينا
$$\begin{cases} x=g(y) \\ y\in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=g^{-1}(x) \\ x\in J \end{cases}$$

$$x=g(y) \Leftrightarrow x=(\sqrt{y}-\sqrt{2})^2$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x}=|\sqrt{y}-\sqrt{2}|$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x}=-\sqrt{y}+\sqrt{2} \quad (\text{لأن } \sqrt{y}-\sqrt{2}\leq 0)$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{y}=-\sqrt{x}+\sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow y=(-\sqrt{x}+\sqrt{2})^2$$
$$\Leftrightarrow y=(\sqrt{x}-\sqrt{2})^2$$

ومنه $g^{-1}(x)=(\sqrt{x}-\sqrt{2})^2$ $(\forall x\in J)$

5

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي :

$$f(x)=x-\sqrt{2x-1}$$

1) أ- بين أن الدالة f متصلة على حيز تعريفها D_f

ب- حدد $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

2) لتكن g قصور الدالة f على المجال $I=[1,+\infty[$.
بين أن الدالة g تقابل من I نحو مجال J يتم تحديده .
3) احسب $g^{-1}(x)$ لكل x من J (لاحظ أن $g(x)=\frac{(\sqrt{2x-1}-1)^2}{2}$)

الجواب 1) أ- لدينا

$$f(x)=x-\sqrt{2x-1}$$

$x\in D_f \Leftrightarrow (x\in\mathbb{R}$ و $2x-1\geq 0)$

$\Leftrightarrow (x\in\mathbb{R}$ و $x\geq \frac{1}{2})$

ومنه $D_f=[\frac{1}{2},+\infty[$

بما أن الدالة $f_1: x\mapsto 2x-1$ متصلة وموجبة على D_f
فإن الدالة $\sqrt{f_1}: x\mapsto \sqrt{2x-1}$ متصلة على D_f
ولدينا الدالة $f_2: x\mapsto x$ متصلة على D_f
ومنه الدالة $f=f_2-\sqrt{f_1}$ متصلة على D_f .

ب- تحديد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

لدينا

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x-\sqrt{x^2\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x-|x|\sqrt{\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x\left(1-\sqrt{\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}\right)$$

ومنه

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

2) لدينا $\forall x\in I=[1,+\infty[\quad g(x)=x-\sqrt{2x-1}$

$$g'(x)=1-\frac{1}{\sqrt{2x-1}}$$

$$g'(x)=\frac{\sqrt{2x-1}-1}{\sqrt{2x-1}}$$

$$g'(x)=\frac{2(x-1)}{\sqrt{2x-1}\,(\sqrt{2x-1}+1)}$$

إشارة $g'(x)$ هي إشارة $x-1$

x	1 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	0 $\qquad$ $+$
$g(x)$	0 ↗ $+\infty$

إذن g تزايدية قطعًا على I

بما أن g متصلة وتزايدية قطعًا على المجال I فإن g تقابل من I نحو $J=g(I)=[0,+\infty[$ وتقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة من J نحو I .

3) حساب $g^{-1}(x)$ لكل x من J .

لدينا

$$\begin{cases} y=g^{-1}(x) \\ x\in J \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=g(y) \\ y\in I \end{cases}$$

$$x=g(y) \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}(\sqrt{2y-1}-1)^2$$

$$\Leftrightarrow 2x=(\sqrt{2y-1}-1)^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x}=|\sqrt{2y-1}-1|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x}=\sqrt{2y-1}-1 \quad (\sqrt{2y-1}-1\geq 0 \text{ لأن } y\in I)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x}-1=\sqrt{2y-1}$$

$$\Leftrightarrow 2y-1=(\sqrt{2x}-1)^2$$

$$\Leftrightarrow 2y=2x-2\sqrt{2x}+2$$

$$\Leftrightarrow y=x-\sqrt{2x}+1$$

وبالتالي

$$(\forall x\in J) \quad g^{-1}(x)=x-\sqrt{2x}+1$$

6

نعتبر الدالة العددية h للمتغير الحقيقي x المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي :

$$h(x)=\frac{1}{x}-x$$

1) أ- بين أن الدالة h تقابل من $]0,+\infty[$ نحو مجال I يتم تحديده .
ب- حدد $h^{-1}(x)$ لكل x من I .

2) نعتبر الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرفة على $]1,+\infty[$ بما يلي :

$$g(x)=\sqrt{x^2-1}$$

أ ـ بين أن g تقابل من $]1,+\infty[$ نحو مجال J يتم تحديده.

ب ـ حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من J.

3) نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $]1,+\infty[$ بمايلي :
$$f(x)=\frac{2-x^2}{\sqrt{x^2-1}}$$

أ ـ تحقق من أن $f=h\circ g$

ب ـ بين أن f تقابل من $]1,+\infty[$ نحو مجال K يتم تحديده.

ج ـ حدد $f^{-1}(x)$ لكل x من K.

الجواب

أ ـ لدينا $h(x)=\frac{1}{x}-x$

h قصور دالة جذرية فهي متصلة على $]0,+\infty[$

$$h'(x)=-\frac{1}{x^2}-1<0$$

إذن h تناقصية قطعاً على المجال $]0,+\infty[$

ومنه h تقابل من $]0,+\infty[$ نحو $I=h(]0,+\infty[)=]\lim\limits_{x\to+\infty}h(x),\lim\limits_{x\to0^+}h(x)[$
$$=]-\infty,+\infty[$$

ب لدينا
$$\begin{cases}y=h^{-1}(x)\\x\in I\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=h(y)\\y\in]0,+\infty[\end{cases}$$

$$x=h(y)\Leftrightarrow x=\frac{1}{y}-y$$
$$\Leftrightarrow yx=1-y^2$$
$$\Leftrightarrow y^2+yx=1$$
$$\Leftrightarrow \left(y+\frac{x}{2}\right)^2=1+\frac{x^2}{4}=\frac{x^2+4}{4}$$
$$\Leftrightarrow \left|y+\frac{x}{2}\right|=\sqrt{\frac{x^2+4}{4}}$$
$$\Leftrightarrow y+\frac{x}{2}=-\frac{\sqrt{x^2+4}}{2} \text{ أو } y+\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{x^2+4}}{2}$$
$$\Leftrightarrow y=\frac{-x-\sqrt{x^2+4}}{2} \text{ أو } y=\frac{-x+\sqrt{x^2+4}}{2}$$

بما أن $y>0$ فإن $y=\frac{-x+\sqrt{x^2+4}}{2}$

ومنه $h^{-1}(x)=\frac{\sqrt{x^2+4}-x}{2}$ $\forall x\in I$

ج) لدينا $g(x)=\sqrt{x^2-1}$

أ ـ الدالة g متصلة على المجال $]1,+\infty[$ (لأنها مركب دالتين متصلتين).

ولدينا $g'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}>0$ لكل x من $]1,+\infty[$

إذن g دالة تزايدية قطعاً على المجال $]1,+\infty[$

ومنه g تقابل من $]1,+\infty[$ نحو $J=g(]1,+\infty[)$
$$J=]\lim_{x\to1^+}g(x),\lim_{x\to+\infty}g(x)[=]0,+\infty[$$

ب ـ لدينا
$$\begin{cases}y=g^{-1}(x)\\x\in J\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=g(y)\\y\in]1,+\infty[\end{cases}$$

$$x=g(y)\Leftrightarrow x=\sqrt{y^2-1}$$
$$\Leftrightarrow x^2+1=y^2$$
$$\Leftrightarrow y=\sqrt{x^2+1} \quad (y>1 \text{ لأن})$$

ومنه $g^{-1}(x)=\sqrt{x^2+1}$ $\forall x\in J$

3) ليكن x عدداً من $]1,+\infty[$.

لدينا
$$(h\circ g)(x)=h(g(x))=\frac{1}{g(x)}-g(x)$$
$$=\frac{1-g^2(x)}{g(x)}=\frac{1-(x^2-1)}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{2-x^2}{\sqrt{x^2-1}}$$

ومنه $f(x)=(h\circ g)(x)$ $\forall x\in]1,+\infty[$

وبالتالي $f=h\circ g$

تذكير

$$\begin{cases}h \text{ تقابل من } I \text{ نحو } J\\ g \text{ تقابل من } J \text{ نحو } K\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}g\circ h \text{ تقابل من } I \text{ نحو } K\\(g\circ h)^{-1}=h^{-1}\circ g^{-1}\end{cases}$$

ب - لدينا

$f = h\circ g$ تقابل من $K = \mathbb{R}$ نحو $]1, +\infty[$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} f \text{ تقابل من }]1,+\infty[\text{ نحو }]0,+\infty[\\ h \text{ تقابل من }]0,+\infty[\text{ نحو }]-\infty,+\infty[\end{cases}$

ج - لنحدد $f^{-1}(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$

لدينا

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad f^{-1}(x) = (h\circ g)^{-1}(x)$$
$$= (g^{-1}\circ h^{-1})(x)$$
$$= g^{-1}(h^{-1}(x))$$
$$= \sqrt{(h^{-1}(x))^2+1}$$
$$= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{x^2+4}-x}{2}\right)^2+1}$$

ومنه

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2x^2-2x\sqrt{x^2+4}+8}$$

7

نعتبر الدالة f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي :

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+3}$$

1) ادرس تغيرات الدالة f .

2) لتكن g قصور الدالة f على $\mathbb{R}^+$

أ- بين أن الدالة g تقابل من $\mathbb{R}^+$ نحو مجال J يتم تحديده .

ب- احسب $g^{-1}(x)$ لكل x من J .

3) انشئ المنحنيين $(\mathscr{C}_g)$ و $(\mathscr{C}_{g^{-1}})$ في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

الجواب

1) لدينا $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+3}$ و $D_f = \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2} = 1$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2} = 1$

لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا $f'(x) = \frac{8x}{(x^2+3)^2}$

إشارة $f'(x)$ هي إشارة x .

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\frac{1}{3}$	$\nearrow$	1

2) لدينا g قصور الدالة f على $\mathbb{R}^+$

أ- بما أن g متصلة و تزايدية قطعا على المجال $\mathbb{R}^+$ فإن g تقابل من $\mathbb{R}^+$ نحو $J = g(\mathbb{R}^+) = [-\frac{1}{3}; 1[$ ، وتقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة من $[-\frac{1}{3}; 1[$ نحو $\mathbb{R}^+$.

ب- لدينا

$$\begin{cases} y = g^{-1}(x) \\ x\in J \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = g(y) \\ y\in\mathbb{R}^+ \end{cases}$$

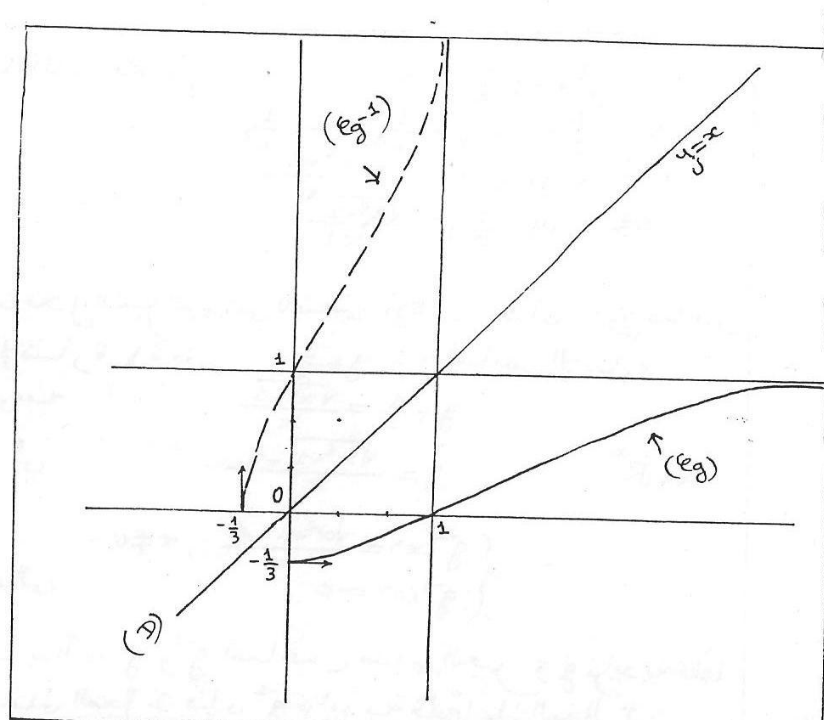
$$x = g(y) \Leftrightarrow x = \frac{y^2-1}{y^2+3}$$
$$\Leftrightarrow xy^2+3x = y^2-1$$
$$\Leftrightarrow y^2(x-1) = -3x-1$$
$$\Leftrightarrow y^2 = \frac{3x+1}{-x+1} \quad (\text{لأن } x\neq 1)$$
$$\Leftrightarrow y = \sqrt{\frac{3x+1}{-x+1}} \quad (\text{لأن } y\geq 0)$$

ومنه

$$(\forall x\in J) \quad g^{-1}(x) = \sqrt{\frac{3x+1}{-x+1}}$$

3) إنشاء المنحنيين $(\mathscr{C}_g)$ و $(\mathscr{C}_{g^{-1}})$.

المنحنيين $(\mathscr{C}_g)$ و $(\mathscr{C}_{g^{-1}})$ متماثلان بالنسبة للمستقيم (D) الذي معادلته : $y = x$.



8

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي:

$$f(x) = \frac{2x}{1-x^2}$$

1) حدد نهايات الدالة f عند محدات D_f.

2) أ- ادرس قابلية الاشتقاق على f على D_f.

ب- ادرس تغيرات الدالة f.

ج- انشئ المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

3) لتكن g قصور الدالة f على المجال $I=]-1,1[$

أ- بين أن g تقابل من I نحو مجال J يتم تحديده.

ب- حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من J.

ج- اعط جدول تغيرات الدالة g^{-1}.

د- انشئ المنحنى $(\mathcal{C}_{g^{-1}})$ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

الجواب 1) لدينا $f(x) = \frac{2x}{1-x^2}$

$$D_f =]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-x^2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-2}{x} = 0$$

x	$-\infty$ -1 1 $+\infty$
$1-x^2$	$-$ 0 $+$ 0 $-$

$$\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}}\frac{2x}{1-x^2} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}}\frac{2x}{1-x^2} = -\infty \quad ; \quad \lim_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{2x}{1-x^2} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to1\\x>1}}\frac{2x}{1-x^2} = -\infty \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim \frac{-2}{x} = 0$$

2) أ- بما أن f دالة جذرية فهي قابلة للاشتقاق على D_f.

ب- تغيرات الدالة f.

لدينا $\forall x\in D_f \quad f'(x) = \frac{(2x)'(1-x^2) - 2x(1-x^2)'}{(1-x^2)^2}$

$$f'(x) = \frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2} > 0$$

ومنه

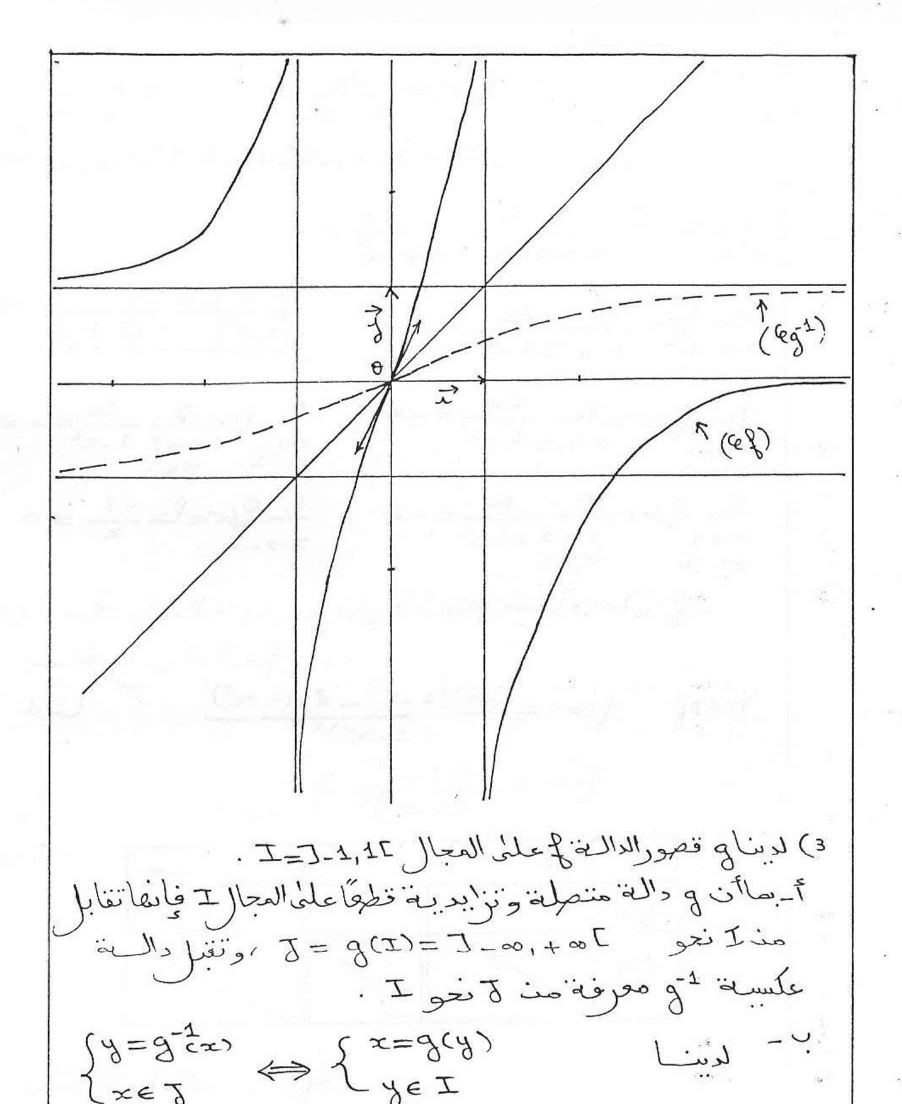
x	$-\infty$ -1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow 0$

ب- إنشاء المنحنى $(\mathcal{C}_f)$

الفروع اللانهائية للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$

بما أن $\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = 0$ فإن المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مقارب أفقي معادلته $y=0$ بجوار $-\infty$ و $+\infty$.

بما أن $\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x) = +\infty$ و $\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = +\infty$ المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مقاربان عموديان معادلتهما: $x=-1$ و $x=1$



3) لدينا g قصور الدالة f على المجال $I=]-1,1[$.

أ- بما أن g دالة متصلة وتزايدية قطعًا على المجال I فإنها تقابل من I نحو $J=g(I)=]-\infty,+\infty[$ ، وتقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة من J نحو I .

ب- لدينا

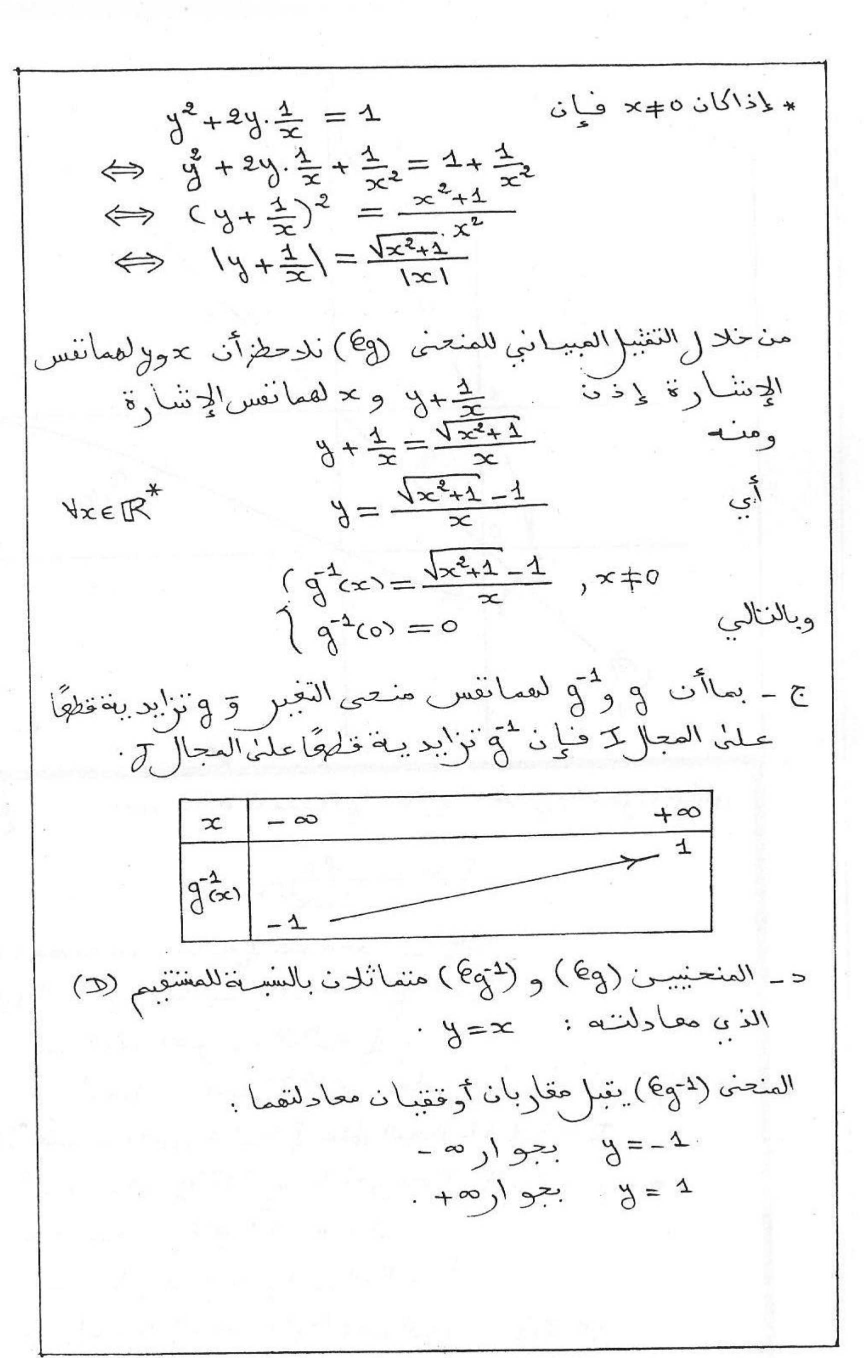
$$\begin{cases} y=g^{-1}(x) \\ x\in J \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=g(y) \\ y\in I \end{cases}$$

$$x=g(y) \Leftrightarrow x=\frac{2y}{1-y^2}$$

$$\Leftrightarrow x-xy^2=2y$$

$$\Leftrightarrow xy^2+2y=x$$

* إذا كان $x=0$ فإن $y=0$ ومنه $g^{-1}(0)=0$



* إذا كان $x\neq 0$ فإن

$$y^2+2y\cdot\frac{1}{x}=1$$

$$\Leftrightarrow y^2+2y\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=1+\frac{1}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(y+\frac{1}{x}\right)^2=\frac{x^2+1}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow \left|y+\frac{1}{x}\right|=\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x|}$$

من خلال التمثيل البياني للمنحنى $(\mathscr{C}_g)$ نلاحظ أن x و y لهما نفس الإشارة إذن $y+\frac{1}{x}$ و x لهما نفس الإشارة

ومنه

$$y+\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$$

أي

$$y=\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} \quad \forall x\in\mathbb{R}^*$$

وبالتالي

$$\begin{cases} g^{-1}(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} \ , \ x\neq 0 \\ g^{-1}(0)=0 \end{cases}$$

ج- بما أن g و g^{-1} لهما نفس منحى التغير و g تزايدية قطعًا على المجال I فإن g^{-1} تزايدية قطعًا على المجال J .

x	$-\infty$ ↗ $+\infty$
$g^{-1}(x)$	-1 ↗ 1

د- المنحنيين $(\mathscr{C}_g)$ و $(\mathscr{C}_{g^{-1}})$ متماثلان بالنسبة للمستقيم (D) الذي معادلته : $y=x$.

المنحنى $(\mathscr{C}_{g^{-1}})$ يقبل مقاربان أفقيان معادلتهما :

$y=-1$ بجوار $-\infty$

$y=1$ بجوار $+\infty$.

9

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي:

$$f(x)=\frac{x}{|x|+1}$$

بين أن f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو $]-1,1[$ محدداً الدالة العكسية f^{-1}.

الجواب

لنبين أن f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو $]-1,1[$

أي أن المعادلة $y=f(x)$ تقبل حلاً وحيداً x في $\mathbb{R}$ حيث y عنصر من $]-1,1[$.

ليكن y عنصراً من $]-1,1[$.

لدينا $y=f(x) \Leftrightarrow y=\frac{x}{|x|+1}$

$\Leftrightarrow y(|x|+1)=x$ (x و y لهما نفس الإشارة)

إذا كان $x\geq 0$ فإن $yx+y=x$ مع $y\in[0,1[$

$x(y-1)=-y$

إذن $x=\frac{y}{1-y}$ مع $y\in[0,1[$

إذا كان $x\leq 0$ فإن $-yx+y=x$ مع $y\in]-1,0]$

$x(y+1)=y$

إذن $x=\frac{y}{1+y}$ مع $y\in[0,1[$

ومنه $x=\frac{y}{1-|y|}$ (حل وحيد في $\mathbb{R}$)

وبالتالي f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو $]-1,1[$ وتقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة من $]-1,1[$ نحو $\mathbb{R}$ بحيث:

$$\forall x\in]-1,1[\quad f^{-1}(x)=\frac{x}{1-|x|}$$

الجذور من الرتبة n والقوة الجذرية

ليكن x و y عددين من $\mathbb{R}^+$ و n و p عددين من $\mathbb{N}^*$.

- $(\sqrt[n]{x})^n=x$ و $\sqrt[n]{x^n}=x$
- $\sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y}=\sqrt[n]{xy}$
- $\sqrt[n]{x}=\sqrt[np]{x^p}$
- $\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}=\sqrt[n]{\frac{x}{y}}$
- $\sqrt[n]{x^p}=(\sqrt[n]{x})^p$ و $\sqrt[n]{\sqrt[p]{x}}=\sqrt[np]{x}$

- ليكن x عنصراً من $\mathbb{R}^*_+$ و p من $\mathbb{Z}$ و q من $\mathbb{N}^*$.

$$x^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{x^p}$$

- ليكن a عنصراً من $\mathbb{R}^*_+$ و r و r' عنصرين من $\mathbb{Q}$.

$a^r\times a^{r'}=a^{r+r'}$ و $(a^r)^{r'}=a^{rr'}$

$a^{-r}=\frac{1}{a^r}$ و $\frac{a^r}{a^{r'}}=a^{r-r'}$

$$\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$$

10

بسط التعابير التالية:

$$A=\frac{\sqrt[4]{9}\sqrt{\sqrt[3]{3}}\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{81}\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}}$$

$$B=\frac{\sqrt[3]{4}\sqrt{8}(\sqrt{\sqrt{2}})^2}{\sqrt{\sqrt[3]{4}}} \quad ; \quad C=2\sqrt[4]{6561}-5\sqrt[3]{27}-3\sqrt[4]{256}$$

الجواب

لدينا $A = \dfrac{9^{\frac14}(3^{\frac13}9^{\frac13})^{\frac12}}{(81)^{\frac13}\cdot((3^{\frac12})^{\frac12})^{\frac12}}$

$$= \frac{(3^2)^{\frac14}\cdot 3^{\frac16}\cdot 9^{\frac16}}{(3^4)^{\frac13}\,3^{\frac18}} = \frac{3^{\frac12}\cdot 3^{\frac16}\cdot 3^{\frac13}}{3^{\frac43}\cdot 3^{\frac18}}$$

$$= 3^{(\frac12+\frac16+\frac13)-(\frac43+\frac18)}$$

$$= 3^{1-\frac{35}{24}} = 3^{-\frac{11}{24}}$$

ومنه $A = \dfrac{1}{\sqrt[24]{3^{11}}}$

لدينا $B = \dfrac{4^{\frac13}\cdot 8^{\frac12}\cdot((2^{\frac12})^{\frac12})^2}{(4^{\frac13})^{\frac12}}$

$$= \frac{4^{\frac13}\cdot 8^{\frac12}\cdot 2^{\frac24}}{4^{\frac16}} = \frac{2^{\frac23}\cdot 2^{\frac32}\cdot 2^{\frac12}}{2^{\frac26}}$$

$$= 2^{(\frac23+\frac32+\frac12)-\frac13} = 2^{\frac73} = 2^{2+\frac13}$$

ومنه $B = 4\sqrt[3]{2}$

لدينا $C = 2\sqrt[4]{81^2} - 5\sqrt[3]{3^3} - 3\sqrt[4]{4^4}$

$$= 2\sqrt[4]{9^4} - 5\times 3 - 3\times 4$$

$$= 2\times 9 - 15 - 12 = 18 - 27$$

ومنه $C = -9$

11 ليكن x و y من $]0,+\infty[$

$$\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4}\sqrt[3]{y^2}} + \sqrt{y^2+\sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{y^4}} = \sqrt{(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2})^3}$$

الجواب

$$\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4}\sqrt[3]{y^2}} + \sqrt{y^2+\sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{y^4}} = (x^2+x^{\frac43}y^{\frac23})^{\frac12} + (y^2+x^{\frac23}y^{\frac43})^{\frac12}$$

$$= [x^{\frac43}(x^{\frac23}+y^{\frac23})]^{\frac12} + [y^{\frac43}(y^{\frac23}+x^{\frac23})]^{\frac12}$$

$$= x^{\frac23}(x^{\frac23}+y^{\frac23})^{\frac12} + y^{\frac23}(x^{\frac23}+y^{\frac23})$$

$$= (x^{\frac23}+y^{\frac23})(x^{\frac23}+y^{\frac23})^{\frac12}$$

$$= (x^{\frac23}+y^{\frac23})^{1+\frac12} = (x^{\frac23}+y^{\frac23})^{\frac32} = (\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2})^{\frac32}$$

ومنه $\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4}\sqrt[3]{y^2}} + \sqrt{y^2+\sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{y^4}} = \sqrt{(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2})^3}$

12 حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

(E) $(x-4)^3+1=0$

(F) $(2x-3)^4-16=0$

(G) $(x^2+1)^5=32$

(H) $x\sqrt[3]{x}-2=0$

الجواب لتكن S_1 مجموعة حلول المعادلة (E)

لدينا

$$x\in S_1 \Leftrightarrow (x-4)^3=-1$$
$$\Leftrightarrow (4-x)^3=1$$
$$\Leftrightarrow 4-x=\sqrt[3]{1}=1$$
$$\Leftrightarrow x=4-1=3$$

ومنه $S_1=\{1\}$

لتكن S_2 مجموعة حلول المعادلة (H)

$$x\in S_2 \Leftrightarrow (2x-3)^4=16$$
$$\Leftrightarrow |2x-3|^4=16$$
$$\Leftrightarrow |2x-3|=\sqrt[4]{16}=2$$

$\Leftrightarrow 2x-3=-2$ أو $2x-3=2$

$\Leftrightarrow x=\frac12$ أو $x=\frac52$

ومنه $S_2=\left\{\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right\}$

لتكن S_3 مجموعة حلول المعادلة (G)

$$x\in S_3 \iff (x^2+1)^5=32$$
$$\iff x^2+1=\sqrt[5]{32}=2$$
$$\iff x^2=1$$
$$\iff x=-1 \text{ أو } x=1$$

ومنه $S_3=\{-1,1\}$

لتكن S_4 مجموعة حلول المعادلة (H)

$$x\in S_4 \iff x\sqrt[3]{x}=2$$
$$\iff \sqrt[3]{x.x^3}=2$$
$$\iff \sqrt[3]{x^4}=2$$
$$\iff x^4=8$$
$$\iff |x|=\sqrt[4]{8}$$
$$\iff x=-\sqrt[4]{8} \text{ أو } x=\sqrt[4]{8}$$

ومنه $S_4=\{-\sqrt[4]{8},\sqrt[4]{8}\}$

13

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : (E) $\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}-12=0$

(يمكنك وضع $x=X^6$)

الجواب لدينا (E) $\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}-12=0$

بوضع $x=X^6$ المعادلة (E) تصبح

$$\sqrt{X^6}+\sqrt[3]{X^6}-12=0$$
$$\iff X^3+X^2-12=0$$
$$\iff (X-2)(X^2+3X+6)=0$$
$$\iff X-2=0 \text{ أو } X^2+3X+6=0$$
$$\iff X=2 \qquad \Delta=9-24=-15<0$$

إذن المعادلة $X^2+3X+6=0$ ليس لها حل في $\mathbb{R}$.

إذن المعادلة (E) تكافئ $x=2^6=64$

و بالتالي مجموعة حلول المعادلة (E) هي :

$$S=\{64\}$$

14

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

(E) $x^3+8=0$

(F) $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{1-x}=\sqrt[3]{2}$

(G) $\sqrt[3]{x^2+7x}=2$

الجواب لتكن S_E مجموعة حلول المعادلة (E)

$$x\in S_E \iff x^3=-8$$
$$\iff (-x)^3=8 \qquad (x<0)$$
$$\iff -x=\sqrt[3]{8} \qquad (-x>0)$$
$$\iff x=-\sqrt[3]{8}=-2$$

ومنه $S_E=\{-2\}$

لتكن S_F مجموعة حلول المعادلة (F)

$$x\in S_F \Rightarrow x\in[-1,1]$$

ومنه $S_F\subset[-1,1]$

$$x\in S_F \iff \left(\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{1-x}\right)^3=2$$
$$\iff x+1+1-x+3\sqrt[3]{x+1}\sqrt[3]{1-x}\left(\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{1-x}\right)=2$$

ملاحظة : $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$

$$x\in S_F \iff 2+3\sqrt[3]{1-x}\,\sqrt[3]{1+x}=2$$
$$\iff \sqrt[3]{1-x}\,\sqrt[3]{1+x}=0$$
$$\iff 1-x=0 \text{ أو } 1+x=0$$
$$\iff x=1 \text{ أو } x=-1$$

ومنه $S_F=\{-1,1\}$

لتكن S_G مجموعة حلول المعادلة (G)

$$x\in S_G \Rightarrow x^2+7x\geq 0$$
$$\Rightarrow x(x+7)\geq 0$$
$$\Rightarrow x\in]-\infty,-7]\cup[0,+\infty[$$

ومنه $S_G\subset]-\infty,-7]\cup[0,+\infty[$

$$x\in S_G \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2+7x}=2$$
$$\Rightarrow x^2+7x=8$$
$$\Leftrightarrow x^2+7x-8=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)(x+8)=0$$

$\Leftrightarrow x=1$ أو $x=-8$

ومنه $S_G=\{-8,1\}$

15 حل في $\mathbb{R}$ المعادلتين :

(E) $\sqrt{x^2-4}=x-2\sqrt{x^2-1}$

(F) $\left(\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{3-\sqrt[3]{x}}\right)^3+125=0$

الجواب

لتكن S_E مجموعة حلول المعادلة (E)

$$x\in S_E \Rightarrow \begin{cases} x^2-4\geq 0 \\ x^2-1\geq 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x\in]-\infty,-2]\cup[2,+\infty[\\ x\in]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[\end{cases}$$
$$\Rightarrow x\in]-\infty,-2]\cup[2,+\infty[$$

ومنه $S_E\subset]-\infty,-2]\cup[2,+\infty[$

$$x\in S_E \Leftrightarrow \sqrt{x^2-4}+2\sqrt{x^2-1}=x$$

ومنه $x\in S_E \Rightarrow x\geq 0$ (لأن $\sqrt{x^2-4}+2\sqrt{x^2-1}\geq 0$)

إذن $S_E\subset [2,+\infty[$

$$x\in S_E \Leftrightarrow x^2-4+4x^2-4+4\sqrt{x^2-4}\sqrt{x^2-1}=x^2$$
$$\Leftrightarrow 4x^2-8+4\sqrt{x^2-4}\sqrt{x^2-1}=0$$
$$\Leftrightarrow x^2-2+\sqrt{x^2-4}\sqrt{x^2-1}=0$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-4}\sqrt{x^2-1}=2-x^2$$

بما أن $x\geq 2$ فإن $2-x^2<0$

ولدينا $\sqrt{x^2-4}\sqrt{x^2-1}=2-x^2<0$ غير ممكن

ومنه $S_E=\emptyset$

لتكن S_F مجموعة حلول المعادلة (F) $\left(\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{3-\sqrt[3]{x}}\right)^3+125=0$

$$x\in S_F \Rightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ 3-\sqrt[3]{x}\neq 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ \sqrt[3]{x}\neq 3 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ x\neq 27 \end{cases}$$

ومنه $S_F\subset [0,27[\cup]27,+\infty[$

نضع $t=\sqrt[3]{x}$

$$(F) \Leftrightarrow \left(\frac{1-t}{3-t}\right)^3=-125$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{t-1}{3-t}\right)^3=5^3$$
$$\Leftrightarrow \frac{t-1}{3-t}=5$$
$$\Leftrightarrow t-1=15-5t$$
$$\Leftrightarrow 6t=16$$
$$\Leftrightarrow t=\frac{16}{6}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{x}=\frac{8}{3}$$
$$\Leftrightarrow x=\left(\frac{8}{3}\right)^3=\frac{512}{27}$$

ومنه $S_F=\left\{\dfrac{512}{27}\right\}$

16

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $x+2 > \sqrt[3]{x^2+8}$ (I)

الجواب لتكن S_I مجموعة حلول المتراجحة (I)

لدينا : $x \in S_I \Rightarrow x > -2$

إذن : $S_I \subset]-2;+\infty[$

ولدينا : $x \in S_I \Leftrightarrow (x+2)^3 > x^2+8$

$$x \in S_I \Leftrightarrow x^3+6x^2+12x+8 > x^2+8$$

$$x \in S_I \Leftrightarrow x^3+5x^2+12x > 0$$

$$x \in S_I \Leftrightarrow x(x^2+5x+12) > 0$$

بما أن مميز الحدودية $x^2+5x+12$ عدد سالب قطعا فإنه لكل x من $\mathbb{R}$

$x^2+5x+12 > 0$ إذن $x \in S_I \Leftrightarrow x > 0$

ومنه فإن $S_I =]0;+\infty[$

تذكير

$$\begin{cases} \sqrt[n]{x} = y \\ x \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y^n \\ y \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

$(\forall x \in \mathbb{R}^+)$ $\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y$

$(\forall y \in \mathbb{R}^+)$ $\sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x < y$

$(\forall x \in \mathbb{R}^+)$ $(\sqrt[n]{x})^n = \sqrt[n]{x^n} = x$

17

ليكن a عدداً من $\mathbb{R}^*$ بين أن

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\sqrt{x^2+a^2} - x > 0$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\sqrt{x^2+a^2} + x > 0$

الجواب لدينا لكل x من $\mathbb{R}$ $x^2+a^2 > x^2$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+a^2} > \sqrt{x^2} = |x|$$

بما أن $|x| \geq -x$ و $|x| \geq x$

فإن $\sqrt{x^2+a^2} > -x$ و $\sqrt{x^2+a^2} > x$

ومنه $\sqrt{x^2+a^2} + x > 0$ و $\sqrt{x^2+a^2} - x > 0$

وبالتالي $\forall x \in \mathbb{R}$ $\sqrt{x^2+a^2} - x > 0$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\sqrt{x^2+a^2} + x > 0$

تذكير

لتكن $f(x) = \sqrt[n]{h(x)}$ $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

$$D_f = \{x \in D_h \mid h(x) \geq 0\}$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow \begin{cases} x \in D_h \\ h(x) \geq 0 \end{cases}$$

لتكن $f(x) = (h(x))^{\frac{1}{n}}$ $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

$$D_f = \{x \in D_h \mid h(x) > 0\}$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow \begin{cases} x \in D_h \\ h(x) > 0 \end{cases}$$

18

حدد حيز تعريف الدالة f في كل من الحالات الآتية :

(1 $f(x) = (x^2-1)^{\frac{1}{4}}$ (2 $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x-3}{x-1}}$

(3 $f(x) = \sqrt[5]{x^2-5x+6}$ (4 $f(x) = \sqrt[7]{\dfrac{x-1}{x^2+x+1}}$

الجواب 1) لدينا $f(x)=(x^2-1)^{\frac{1}{4}}$

$x\in D_f \Leftrightarrow (x\in\mathbb{R}$ و $x^2-1>0)$

$\Leftrightarrow (x\in\mathbb{R}$ و $(x-1)(x+1)>0)$

ومنه $D_f=]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

2) لدينا $f(x)=\sqrt[3]{\frac{x-3}{x-1}}$

$x\in D_f \Leftrightarrow (x\in\mathbb{R}$ و $x-1\neq 0$ و $\frac{x-3}{x-1}\geq 0)$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x-3}{x-1}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

ومنه $D_f=]-\infty,1[\cup[3,+\infty[$

3) لدينا $f(x)=\sqrt[5]{x^2-5x+6}$

$x\in D_f \Leftrightarrow (x\in\mathbb{R}$ و $x^2-5x+6\geq 0)$

$\Leftrightarrow (x\in\mathbb{R}$ و $(x-2)(x-3)\geq 0)$

ومنه $D_f=]-\infty,2]\cup[3,+\infty[$

4) لدينا $f(x)=\sqrt[7]{\frac{x-1}{x^2+x+1}}$

$x\in D_f \Leftrightarrow (x\in\mathbb{R}$ و $x^2+x+1\neq 0$ و $\frac{x-1}{x^2+x+1}\geq 0)$

بما أن مميز الحدودية x^2+x+1 يساوي $\Delta=-3<0$

فإن لكل x من $\mathbb{R}$ $x^2+x+1>0$

إذن $x\in D_f \Leftrightarrow (x\in\mathbb{R}$ و $x-1\geq 0)$

$\Leftrightarrow (x\in\mathbb{R}$ و $x\geq 1)$

ومنه $D_f=[1,+\infty[$

19 حدد حيز تعريف الدالة f في كل من الحالات الآتية:

1) $f(x)=\sqrt[3]{x^2(x-1)}$ 2) $f(x)=\sqrt[3]{x-3}\sqrt[4]{1-x}$

3) $f(x)=\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x-1}$ 4) $f(x)=(4-x^{2/3})^{3/2}$

الجواب

1) لدينا $f(x)=\sqrt[3]{x^2(x-1)}$

$x\in D_f \Leftrightarrow (x^2(x-1)\geq 0$ و $x\in\mathbb{R})$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x^2		$+$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x^2(x-1)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

ومنه $D_f=[1,+\infty[\cup\{0\}$

2) لدينا $f(x)=\sqrt[3]{x-3}\sqrt[4]{1-x}$

$x\in D_f \Leftrightarrow (x\in\mathbb{R}$ و $x-3\geq 0$ و $1-x\geq 0)$

$x\in D_f \Leftrightarrow (x\in\mathbb{R}$ و $x\geq 3$ و $x\leq 1)$

ومنه $D_f=\emptyset$

3) لدينا $f(x)=\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x-1}$

$x\in D_f \Leftrightarrow (x\in\mathbb{R}$ و $x\geq 0$ و $x-1\geq 0)$

$x\in D_f \Leftrightarrow (x\in\mathbb{R}$ و $x\geq 0$ و $x\geq 1)$

ومنه $D_f=[1,+\infty[$

4) لدينا $f(x)=(4-x^{2/3})^{3/2}$

$x\in D_f \Leftrightarrow (x\in\mathbb{R}$ و $x>0$ و $4-x^{2/3}>0)$

$x\in D_f \Leftrightarrow (x\in\mathbb{R}$ و $x>0$ و $x^{2/3}<4$

$x \in D_f \Leftrightarrow (x\in\mathbb{R}$ و $x>0$ و $x<4^{3/2})$

$\Leftrightarrow (x\in\mathbb{R}$ و $x>0$ و $x<2^3=8)$

ومنه $D_f =]0,8[$.

20 حدد حيز تعريف الدالة f في كل من الحالات الآتية :

1) $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x+2}-1}$

2) $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x^2-1}-2x}{\sqrt[4]{x}-1}$

3) $f(x)=\dfrac{\sqrt[4]{x^2+2x}}{\sqrt[3]{x^2-2x}}$

الجواب 1) لدينا $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x+2}-1}$

$x\in D_f \Leftrightarrow (x\in\mathbb{R}$ و $x\geq 0$ و $x+2\geq 0$ و $\sqrt[3]{x+2}-1\neq 0)$

$\Leftrightarrow (x\in\mathbb{R}$ و $x\geq 0$ و $x\geq -2$ و $\sqrt[3]{x+2}\neq 1)$

$\Leftrightarrow (x\in\mathbb{R}$ و $x\geq 0$ و $x+2\neq 1)$

$\Leftrightarrow (x\in\mathbb{R}$ و $x\geq 0$ و $x\neq -1)$

$\Leftrightarrow (x\in\mathbb{R}$ و $x\geq 0)$

ومنه $D_f=[0,+\infty[$

2) لدينا $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x^2-1}-2x}{\sqrt[4]{x}-1}$

$x\in D_f \Leftrightarrow (x\in\mathbb{R}$ و $x^2-1\geq 0$ و $x\geq 0$ و $\sqrt[4]{x}-1\neq 0)$

$\Leftrightarrow (x\in\mathbb{R}$ و $(x-1)(x+1)\geq 0$ و $x\geq 0$ و $\sqrt[4]{x}\neq 1)$

$\Leftrightarrow (x\in\mathbb{R}$ و $x-1\geq 0$ و $x\neq 1)$

$\Leftrightarrow (x\in\mathbb{R}$ و $x>1$

ومنه $D_f=]1,+\infty[$

3) لدينا $f(x)=\dfrac{\sqrt[4]{x^2+2x}}{\sqrt[3]{x^2-2x}}$

$x\in D_f \Leftrightarrow (x\in\mathbb{R}$ و $x^2+2x\geq 0$ و $x^2-2x>0)$

$\Leftrightarrow (x\in\mathbb{R}$ و $x(x+2)\geq 0$ و $x(x-2)>0)$

ومنه $D_f=(]-\infty,-2]\cup[0,+\infty[)\cap(]-\infty,0[\cup]2,+\infty[)$

$D_f=]-\infty,-2]\cup]2,+\infty[$

تذكير

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell \\ \ell\geq 0\end{cases} \Longrightarrow \lim_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\ell}$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty \Longrightarrow \lim_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=+\infty$$

العدد	مرافقه
$\sqrt{x}-\sqrt{y}$	$\sqrt{x}+\sqrt{y}$
$\sqrt{x}+\sqrt{y}$	$\sqrt{x}-\sqrt{y}$
$\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}$	$\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}$
$\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}$	$\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}$
$\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}$	$\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[4]{x^2y}+\sqrt[4]{xy^2}+\sqrt[4]{y^3}$

21 حدد النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[4]{x^4+1}+x+2$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+x}-2x$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x+1}$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+1}-x$

الجواب 1) شكل غير محدد "$+\infty-\infty$"

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt[4]{x^4+1}+x+2 = "+\infty-\infty"$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\sqrt[4]{x^4\left(1+\frac{1}{x^4}\right)}+x+2$$

$$=\lim_{x\to-\infty}|x|\sqrt[4]{1+\frac{1}{x^4}}+x+2$$

$$=\lim_{x\to-\infty}x\left(-\sqrt[4]{1+\frac{1}{x^4}}+1\right)+2 = "-\infty\times 0"$$ شكل غير محدد

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1-\frac{1}{x^4}-1\right)}{\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{x^4}}\right)^3+\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{x^4}}\right)^2+\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{x^4}}\right)+1}+2$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\frac{1}{x^3}}{\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{x^4}}\right)^3+\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{x^4}}\right)^2+\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{x^4}}\right)+1}+2$$

ومنه $\lim_{x\to-\infty}\sqrt[4]{x^4+1}+x+2=2$

2) لدينا

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+x}-2x=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}-2x$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}}-2\right)=+\infty\times-1$$

ومنه $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+x}-2x=-\infty$

3)

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+2)-(x+1)}{\left(\sqrt[3]{x+2}\right)^2+\sqrt[3]{x+2}\sqrt[3]{x+1}+\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x+2}\right)^2+\sqrt[3]{x+2}\sqrt[3]{x+1}+\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2}$$

ومنه $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x+1}=0$

4) لدينا

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+1}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^3+1)-x^3}{\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)^2+\sqrt[3]{x^3+1}+\sqrt[3]{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)^2+\sqrt[3]{x^3+1}+\sqrt[3]{x^2}}=0$$

22

حدد النهايات التالية :

1) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}}\cdot\sqrt[12]{x}$

2) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3+x+1}}{x}$

3) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[4]{x^4+x}-\sqrt{x^4-x}$

الجواب 1)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}}\cdot\sqrt[12]{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[4]{x}\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}}-1\right)}{\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}-1\right)}\cdot\sqrt[12]{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{1}{4}}\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}}-1\right)}{x^{\frac{1}{3}}\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}-1\right)}\cdot x^{\frac{1}{12}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}}-1}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}-1}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)-1}{\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}}\right)^3+\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}}\right)^2+\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}}+1}\times\frac{\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}\right)^2+\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}+1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)-1}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}\right)^2+\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}+1}{\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}}\right)^3+\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}}\right)^2+\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}}+1}=\frac{3}{4}$$

2)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3+x+1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=1$$

3)

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[4]{x^4+x}-\sqrt{x^4-x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[4]{x^4\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}-\sqrt{x^4\left(1-\frac{1}{x^3}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt[4]{1-\frac{1}{x^3}}\right)-x\sqrt{1-\frac{1}{x^3}}$$

$$=-\infty$$

23 حدد النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$

3) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt[3]{x+6}-2}{1-\sqrt[3]{3-x}}$

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt{x+1}-1}$

الجواب

1)
$$\lim_{x\to 8} \frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8} = \lim_{x\to 8} \frac{(\sqrt[3]{x})^3-2^3}{(x-8)(\sqrt[3]{x}^2+2\sqrt[3]{x}+2^2)}$$
$$= \lim_{x\to 8} \frac{x-8}{(x-8)(\sqrt[3]{x}^2+2\sqrt[3]{x}+4)}$$
$$= \lim_{x\to 8} \frac{1}{\sqrt[3]{x}^2+2\sqrt[3]{x}+4} = \frac{1}{12}$$

2)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt[3]{x+1})^3-1^3}{x(\sqrt[3]{x+1}^2+\sqrt[3]{x+1}+1)}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{x(\sqrt[3]{x+1}^2+\sqrt[3]{x+1}+1)}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}^2+\sqrt[3]{x+1}+1} = \frac{1}{3}$$

3)
$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt[3]{x+6}-2}{1-\sqrt[3]{3-x}} = \lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt[3]{x+6})^3-2^3}{\sqrt[3]{x+6}^2+2\sqrt[3]{x+6}+4} \times \frac{1^2+\sqrt[3]{3-x}+\sqrt[3]{3-x}^2}{1^3-(\sqrt[3]{3-x})^3}$$
$$= \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{\sqrt[3]{x+6}^2+2\sqrt[3]{x+6}+4} \times \frac{1+\sqrt[3]{3-x}+\sqrt[3]{3-x}^2}{x-2}$$
$$= \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt[3]{3-x}^2+\sqrt[3]{3-x}+1}{\sqrt[3]{x+6}^2+2\sqrt[3]{x+6}+4} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

4)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt{x+1}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt[3]{x+1})^3-1^3}{\sqrt[3]{x+1}^2+\sqrt[3]{x+1}+1} \times \frac{\sqrt{x+1}+1}{(\sqrt{x+1})^2-1^2}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt[3]{x+1}^2+\sqrt[3]{x+1}+1} \times \frac{\sqrt{x+1}+1}{x}$$

ومنه
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt{x+1}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt[3]{x+1}^2+\sqrt[3]{x+1}+1} = \frac{2}{3}$$

24 حدد النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt[4]{x+1}+1}{\sqrt[3]{x+1}-1}$

2) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[4]{x+1}}{\sqrt[6]{x+1}+\sqrt{x+1}}$

الجواب 1) لدينا
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt[4]{x+1}+1}{\sqrt[3]{x+1}-1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt[4]{x}\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}}-\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)}{\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)}$$
$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{x^{\frac{1}{4}}\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}}-\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)}{x^{1/3}\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)}$$
$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^{1/12}} \cdot \frac{\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}}-\frac{1}{\sqrt[4]{x}}}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}} = 0$$

2) لدينا
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[4]{x+1}}{\sqrt[6]{x+1}-\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}-x^{\frac{1}{4}}\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}}}{x^{\frac{1}{6}}\sqrt[6]{1+\frac{1}{x}}+x^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$$
$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{x^{\frac{1}{3}}\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}-x^{-\frac{1}{12}}\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}}\right)}{x^{\frac{1}{2}}\left(x^{-\frac{1}{3}}\sqrt[6]{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)}$$
$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^{1/6}} \times \frac{\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}-\frac{1}{x^{1/12}}\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x^{1/3}}\sqrt[6]{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$$
$$= 0$$

25 حدد النهاية

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[4]{x+1}}{x}$

الجواب
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[4]{x+1}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt[3]{x+1}-1)-(\sqrt[4]{x+1}-1)}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x} - \frac{\sqrt[4]{x+1}-1}{x}$$

لدينا

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[3]{x+1})^3-1^3}{x(\sqrt[3]{x+1}^2+\sqrt[3]{x+1}+1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(\sqrt[3]{x+1}^2+\sqrt[3]{x+1}+1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{x+1}^2+\sqrt[3]{x+1}+1}=\frac{1}{3}$$

ولدينا

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{x+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[4]{x+1})^4-1^4}{x(\sqrt[4]{x+1}^3+\sqrt[4]{x+1}^2+\sqrt[4]{x+1}+1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(\sqrt[4]{x+1}^3+\sqrt[4]{x+1}^2+\sqrt[4]{x+1}+1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[4]{x+1}^3+\sqrt[4]{x+1}^2+\sqrt[4]{x+1}+1}=\frac{1}{4}$$

ومنه

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[4]{x+1}}{x}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$$

26

حدد النهايتين التاليتين :

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt[3]{x-1}}$

2) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$

<u>الجواب</u> 1) لدينا

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt[3]{x-1}}=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{\sqrt[6]{(x^2-1)^3}}{\sqrt[6]{(x-1)^2}}$$

$$=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\sqrt[6]{\frac{(x^2-1)^3}{(x-1)^2}}=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\sqrt[6]{\frac{(x-1)^3(x+1)^3}{(x-1)^2}}$$

$$=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\sqrt[6]{(x-1)(x+1)^3}=0$$

2) لدينا

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{1}{\sqrt{x-1}}-\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{1}{\sqrt{x-1}}\left(1-\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}}\right)$$

$$=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{1}{\sqrt{x-1}}\left(1-\sqrt[6]{x-1}\right)=+\infty$$

(لأن: $\frac{\sqrt{X}}{\sqrt[3]{X}}=\sqrt[6]{X}$)

تمارين للبحث

1

حدد النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{3x-x^3}{x^4-2}$

2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{5}{x}$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2x+1}}{x-\sqrt{x}}$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\sin x}{\tan x}$

2

حدد النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{-x^4+3x^2+2x-1}{(x^2+1)(x^4-1)}$

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x-4}{x^2-1}$

3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}}{x-1}$

3) $\lim\limits_{x\to}\dfrac{1-\cos 2x}{x(2-x)\tan 2x}$

3

حدد النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{x+1}$

2) $\lim\limits_{|x|\to+\infty}2x^2+1-\sqrt{x^4+x+1}$

3) $\lim\limits_{|x|\to+\infty}x\sqrt{1+x^2}-x^2$

4) $\lim\limits_{|x|\to}x-\dfrac{4}{\sqrt{x+2}}$

5) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x}$

6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{4x^2-1}-2x}$

4

حدد النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2-\sqrt{x^2-4x+8}}{x-2}$

2) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt{x-2}-2}{x^2-7x+6}$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sin 2x}$

4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3x^2+1}-2}{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x-2}}$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}$

6) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

5

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي :

$$f(x)=\frac{2x+\cos x}{1+x}$$

1) بين أن لكل x من $\mathbb{R}_+^*$: $|f(x)-2|<\frac{3}{x}$

2) استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

6

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي :

$$f(x)=\frac{x(1+\sin x)}{x-\sqrt{x^2+1}}$$

1) بين أن لكل x من $\mathbb{R}$: $\frac{1}{x-\sqrt{x^2+1}}<-2x$

2) استنتج أن لكل x من $\mathbb{R}_+^*$: $f(x)\leq -4x^2$

3) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

7

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي :

$$f(x)=\frac{3x^2-2x-1}{(x-1)(x-2)}$$

1) حدد مجموعة تعريف الدالة f : D_f

2) حدد نهايات الدالة f عند محدات D_f .

3) ادرس اتصال الدالة f على D_f .

8

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{2x^2-x-1}{1-x^3} & , x<1 \\ f(x)=x-\dfrac{2}{x} & , x\geq 1 \end{cases}$$

1) حدد مجموعة تعريف الدالة f : D_f

2) حدد $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3) بين أن الدالة f متصلة في $x_0=1$.

4) ادرس اتصال الدالة f على كل من $]1,+\infty[$ و $]-1,1[$ و $]-\infty,-1[$

9

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي :

$$\begin{cases} f(x)=x+1-\sqrt{x^2+1} & ; x\leq 0 \\ f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{|x-1|}} & ; x>0 \end{cases}$$

1) حدد حيز تعريف الدالة f : D_f

2) حدد نهايات الدالة f عند محدات D_f .

3) ادرس اتصال الدالة f في $x_0=0$.

10

نعتبر الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي :

$$\begin{cases} g(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{4x^2+1}-1} & ; x\neq 0 \\ g(0)=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

1) حدد حيز تعريف الدالة g .

2) ادرس اتصال الدالة g في $x_0=0$.

11

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي :

$$f(x)=\frac{x^3+8}{x^2-4}$$

1) حدد حيز تعريف الدالة f : D_f .

2) أ- حدد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

ب- بين أن الدالة f متصلة على D_f .

3) أ- بين أن الدالة f تقبل تمديدا بالإتصال في $x_0=-2$ ثم عرفه.

ب- هل الدالة f تقبل تمديدا بالإتصال في $x_1=2$ ؟

12

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي :

$$f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$$

1) حدد حيز تعريف الدالة f .

2) بين أن الدالة f زوجية .

3) بين أن الدالة f تقبل تمديداً بالإتصال في $x_0=0$.

13

نعتبر الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي :

$$f(x)=\sqrt{x^2+1}-(x+1)$$

1) حدد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) نعتبر الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بمايلي :

$$g(x)=\frac{f(x)}{x}$$

أ- بين أن $g(x)+1=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}$ ثم تحقق من أن لكل x من $\mathbb{R}^*$ $\sqrt{x^2+1}+1\geqslant 2$

ب- استنتج أن لكل x من $\mathbb{R}^*$ $|g(x)+1|\leqslant\dfrac{|x|}{2}$

3) احسب $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ ثم استنتج أن الدالة g تقبل تمديداً بالإتصال في $x_0=0$ ؛ ينبغي تحديده .

14

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $I=]1,+\infty[$ بمايلي : $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

1) بين أن f تقابل من I نحو I .

2) حدد الدالة العكسية f^{-1} للدالة f .

15

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $[4,+\infty[$ بمايلي :

$$f(x)=x-2\sqrt{x}$$

1) بين أن f تقابل من $[4,+\infty[$ نحو مجال J ينبغي تحديده .

2) حدد $f^{-1}(x)$ لكل x من J .

16

بسط التعابير التالية :

$$A=\frac{\sqrt{10}\;\sqrt{8}\;\sqrt[3]{4}}{\sqrt[4]{\sqrt{256}}}\qquad B=\frac{\sqrt[5]{128}\sqrt{32}\sqrt[3]{\sqrt[5]{4}}}{\sqrt{\sqrt{30}}}$$

$$C=\frac{\sqrt[5]{4}\sqrt{8}\left(\sqrt[5]{\sqrt[3]{4}}\right)^2}{\sqrt{\sqrt{2}}}\qquad D=\frac{\sqrt[3]{9}\sqrt{\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{3}}}{\sqrt[5]{27\sqrt{6}}}$$

$$E=\frac{\sqrt{4}\sqrt{8}\left(\sqrt[3]{\sqrt{4}}\right)^2}{\sqrt[3]{\sqrt{2}}}\qquad F=\frac{\sqrt[15]{3}\sqrt[3]{9}\left(\sqrt{9}\right)^3}{\sqrt[4]{27}\left(\sqrt{\sqrt{3}}\right)^2}$$

17

بسط التعبير التالي :

$$A=\frac{a^3-2a^{1/2}.b^{3/4}-a^{5/2}.b^{\frac{1}{3}}+2b^{13/12}}{a^{1/2}-b^{1/3}}$$

حيث $a>0$ و $b>0$ و $a^{1/2}-b^{1/3}\neq 0$

18

رتب الأعداد التالية ترتيباً تزايدياً

$\sqrt[3]{28}$ ، $\sqrt[4]{15}$ ، $\sqrt{13}$ ، $\sqrt[9]{80}$ ، $\sqrt[12]{100}$

19

لتكن x و y و z أعداداً من $]0,+\infty[$

بين أن $x^{2/3}+y^{2/3}=z^{2/3}\Rightarrow(x^2+y^2-z^2)^3+27x^2y^2z^2=0$

20

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي :

$$f(x)=\sqrt[3]{x^2-x}-x$$

1) حدد حيز تعريف الدالة f .

2) حدد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

3) حدد النهايتين : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\dfrac{f(x)+1}{x-1}$ و $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\dfrac{f(x)}{x}$

4) ادرس اتصال الدالة f على D_f .

الدوال القابلة للاشتقاق

21

حدد النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x+\sqrt[3]{x^2}}}$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x-2}-(x^2-1)$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt[3]{\dfrac{1+2x}{x^4}}}$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[15]{x^3}}{3\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{x}}$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^3+2}-x$

6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt[4]{x^4+2x^3+2x}}{2x+1}$

22

حدد النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{\sqrt[3]{x-1}-\sqrt{x-1}}{x-2}$

2) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}$

3) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{1-\sqrt{2-\sqrt{4-3x}}}{1-\sqrt{2-\sqrt{\frac{1}{3-2x}}}}$

4) $\lim\limits_{x\to8} \dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt[3]{x+19}-3}$

23

حدد النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt[3]{4x+4}-2}{\sqrt[3]{x}-1}$

2) $\lim\limits_{x\to8} \dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt[3]{x+56}-4}$

3) $(a>0)$ $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt[5]{x}+\sqrt[6]{x}}$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}-\sqrt{x}$

6) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[4]{x^3}\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{x-1}\right)$

24

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

(1) $x^6-5x^3+6=0$

(2) $\sqrt[3]{x^2-1}=2$

(3) $\sqrt[3]{x^2}-5\sqrt[3]{x}+6=0$

(4) $x^{2/5}-5x^{1/5}+6=0$

(5) $2x^{1/3}-3x^{1/6}+1=0$

الإشتقاق

تذكير

f دالة قابلة للإشتقاق في x_0 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l \in \mathbb{R}$

العدد l يسمى العدد المشتق عند x_0 ويرمز له ب $l = f'(x_0)$

f قابلة للإشتقاق على يمين x_0 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l_1 \in \mathbb{R}$

العدد l_1 يسمى العدد المشتق على يمين x_0 ويرمز له ب $l_1 = f'_d(x_0)$

f قابلة للإشتقاق على يسار x_0 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l_2 \in \mathbb{R}$

العدد l_2 يسمى العدد المشتق على يسار x_0 و يرمز له ب $l_2 = f'_g(x_0)$

f قابلة للإشتقاق في x_0 $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} f \text{ قابلة للاشتقاق على يمين وعلى يسار } x_0 \\ f'_d(x_0) = f'_g(x_0) \end{cases}$

---

f متصلة في x_0 $\Leftarrow$ ($\not\Rightarrow$) f قابلة للإشتقاق في x_0 .

f غير متصلة في x_0 $\Rightarrow$ ($\not\Leftarrow$) f غير قابلة للإشتقاق في x_0 .

1

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي :

$$f(x) = \sqrt{4-x^2} - x$$

1) حدد حيز تعريف الدالة f

2) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f في النقطة $x_0 = 0$.

3) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f في النقطة $x_1 = 2$ على اليسار .

4) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f في النقطة $x_2 = -2$ على اليمين .

الجواب لدينا $f(x)=\sqrt{4-x^2}-x$

$x\in D_f \Leftrightarrow (x\in\mathbb{R}$ و $4-x^2\geq 0)$

$\Leftrightarrow (x\in\mathbb{R}$ و $(2-x)(2+x)\geq 0)$

ومنه $D_f=[-2,2]$

2) قابلية اشتقاق الدالة f في $x_0=0$.

ليكن x عدداً من $[-2,2]\setminus\{0\}$ لدينا

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\sqrt{4-x^2}-x-2}{x}=\frac{\sqrt{4-x^2}-2}{x}-1$$

$$=\frac{(4-x^2)-4}{x(\sqrt{4-x^2}+2)}-1=\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}+2}-1$$

إذن $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-1\in\mathbb{R}$

و منه f دالة قابلة للإشتقاق في $x_0=0$ و $f'(0)=-1$

3) قابلية اشتقاق الدالة f في $x_1=2$ على اليسار

ليكن x عدداً من $]-2,2[$ لدينا

$$\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\frac{\sqrt{4-x^2}-x+2}{x-2}=\frac{\sqrt{4-x^2}}{x-2}-1$$

$$=-\frac{\sqrt{(2-x)(2+x)}}{\sqrt{(2-x)^2}}=-\sqrt{\frac{(2-x)(2+x)}{(2-x)^2}}$$

$$=-\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}$$

ومنه $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=-\infty$

إذن f غير قابلة للإشتقاق في $x_1=2$ على اليسار

4) قابلية اشتقاق الدالة f في $x_2=-2$ على اليمين.

ليكن x عدداً من $]-2,2]$ لدينا

$$\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}=\frac{\sqrt{4-x^2}-x-2}{x+2}=\frac{\sqrt{(2-x)(2+x)}}{\sqrt{(x+2)^2}}-1$$

إذن $\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}=\sqrt{\frac{2-x}{x+2}}-1$

ومنه $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}=+\infty$

إذن f غير قابلة للا شتقاق في $x_2=-2$ على اليمين .

2

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي :

$$f(x)=|2x(x-3)|$$

ادرس قابلية اشتقاق الدالة f في النقطة $x_0=3$.

الجواب لدينا $D_f=\mathbb{R}$

ليكن x عدداً من $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ لدينا $\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\frac{|2x||x-3|}{x-3}$

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ x<3}}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{\substack{x\to 3\\ x<3}}-2|x|=-6\in\mathbb{R}$$

إذن f قابلة للإشتقاق على يسار $x_0=3$ و $f'_g(3)=-6$

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ x>3}}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{\substack{x\to 3\\ x>3}}2|x|=6\in\mathbb{R}$$

إذن f قابلة للإشتقاق على يمين $x_0=3$ و $f'_d(3)=6$

بما أن $f'_d(3)\neq f'_g(3)$ فإن الدالة f غير قابلة للاشتقاق في 3

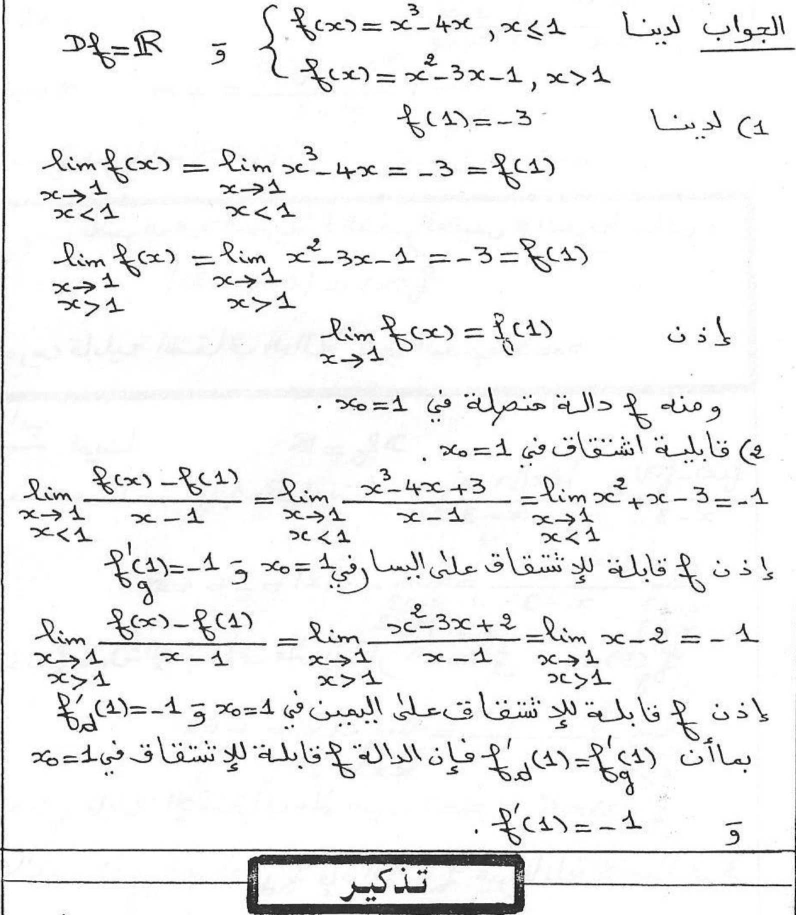
3

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي :

$$\begin{cases} f(x)=x^3-4x & , x\leq 1\\ f(x)=x^2-3x-1 & , x>1\end{cases}$$

1) ادرس اتصال الدالة f في النقطة $x_0=1$.

2) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f في النقطة $x_0=1$.



الجواب لدينا $\begin{cases} f(x)=x^3-4x \,, x\le 1 \\ f(x)=x^2-3x-1 \,, x>1 \end{cases}$ و $D_f=\mathbb{R}$

1) لدينا $f(1)=-3$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} x^3-4x=-3=f(1)$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} x^2-3x-1=-3=f(1)$$

إذن $\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$

ومنه f دالة متصلة في $x_0=1$.

2) قابلية اشتقاق في $x_0=1$.

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{x^3-4x+3}{x-1}=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} x^2+x-3=-1$$

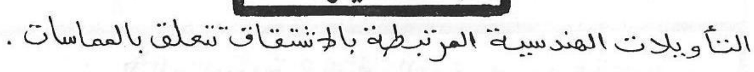
إذن f قابلة للإشتقاق على اليسار في $x_0=1$ و $f'_g(1)=-1$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{x^2-3x+2}{x-1}=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} x-2=-1$$

إذن f قابلة للإشتقاق على اليمين في $x_0=1$ و $f'_d(1)=-1$

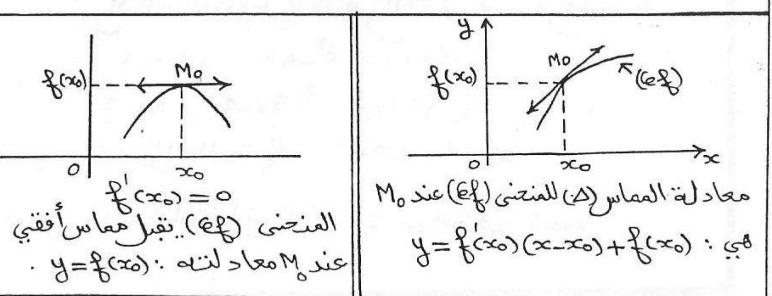
بما أن $f'_d(1)=f'_g(1)$ فإن الدالة f قابلة للإشتقاق في $x_0=1$

و $f'(1)=-1$.



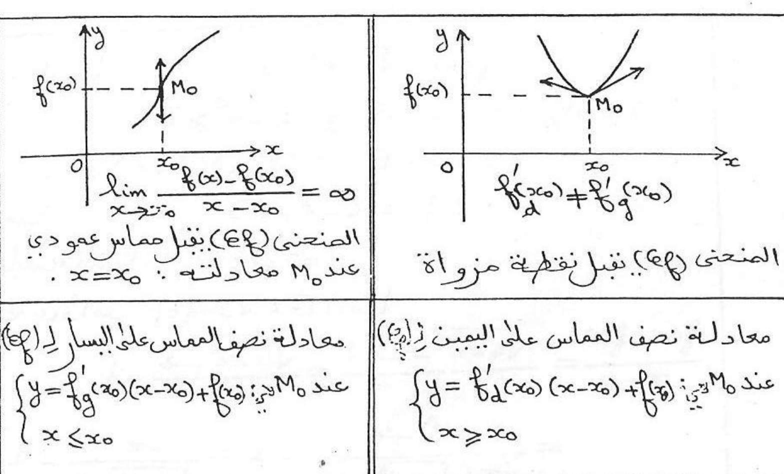
تذكير

التأويلات الهندسية المرتبطة بالإشتقاق تتعلق بالمماسات .



معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) عند M_0 هي : $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

$f'(x_0)=0$ المنحنى (C_f) يقبل مماس أفقي عند M_0 معادلته : $y=f(x_0)$.



$f'_d(x_0)\neq f'_g(x_0)$ المنحنى (C_f) يقبل نقطة مزواة

$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\infty$ المنحنى (C_f) يقبل مماس عمودي عند M_0 معادلته : $x=x_0$.

معادلة نصف المماس على اليمين لـ(C_f) عند M_0 هي : $\begin{cases} y=f'_d(x_0)(x-x_0)+f(x_0) \\ x\ge x_0 \end{cases}$

معادلة نصف المماس على اليسار لـ(C_f) عند M_0 هي : $\begin{cases} y=f'_g(x_0)(x-x_0)+f(x_0) \\ x\le x_0 \end{cases}$

4 نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي :

$$\begin{cases} f(x)=\frac{1-\cos x}{x} \,, x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

1) ادرس اتصال الدالة f في $x_0=0$.

2) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f في النقطة $x_0=0$.

3) حدد معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الأفصول $x_0=0$.

الجواب

1) لدينا $D_f=\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\times x=\frac{1}{2}\times 0=0=f(x)$$

ومنه f دالة متصلة في $x_0=0$.

2) لدينا $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}\in\mathbb{R}$

ومنه f دالة قابلة للاشتقاق في $x_0=0$ و $f'(0)=\frac{1}{2}$

3) معادلة المماس (Δ) هي $y=f'(0)(x-0)+f(0)$

ومنه $(\Delta): y=\frac{1}{2}x$

5

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي :

$$\begin{cases} f(x)=\sqrt[3]{x^3+3x^2} \ , & x\geq 0\\ f(x)=4\sqrt{1-x}+x-4 \ , & x<0\end{cases}$$

1) ادرس اتصال الدالة f في $x_0=0$.

2) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f في $x_0=0$.

3) حدد معادلتي المماسين للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الأفصول 0

الجواب

1) لدينا $D_f=\mathbb{R}$ و $f(0)=0$

$$\lim_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to0\\x<0}} 4\sqrt{1-x}+x-4=0=f(0)$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \sqrt[3]{x^3+3x^2}=0=f(0)$$

إذن $\lim_{x\to0} f(x)=f(0)$

ومنه f دالة متصلة في $x_0=0$.

2) قابلية اشتقاق الدالة f في $x_0=0$.

$$\lim_{\substack{x\to0\\x<0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\to0\\x<0}} \frac{4(\sqrt{1-x}-1)}{x}+1$$

$$=\lim_{\substack{x\to0\\x<0}} \frac{-4x}{x(\sqrt{1-x}+1)}+1$$

$$=\lim_{\substack{x\to0\\x<0}} \frac{-4}{\sqrt{1-x}+1}+1=-1\in\mathbb{R}$$

إذن f قابلة للإشتقاق على اليسار في $x_0=0$ و $f'_g(0)=-1$

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{x\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}}}{x}=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \sqrt[3]{1+\frac{3}{x}}=1\in\mathbb{R}$$

إذن f قابلة للإشتقاق على اليمين في x_0 و $f'_d(0)=1$

بما أن $f'_d(0)\neq f'_g(0)$ فإن الدالة f غير قابلة للإشتقاق في النقطة $x_0=0$

والمنحنى (C_f) يقبل نقطة مزواة $O(0;0)$.

3) معادلة نصف المماس (Δ) للمنحنى (C_f) على اليمين عند النقطة $O(0;0)$ هي :

$$\begin{cases} y=f'_d(0)(x-0)+f(0)\\ x\geq0\end{cases} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} y=x\\ x\geq0\end{cases}$$

معادلة نصف المماس (Δ) للمنحنى (C_f) على اليسار عند النقطة $O(0;0)$ هي:

$$\begin{cases} y=f'_g(0)(x-0)+f(0)\\ x\leq0\end{cases} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} y=-x\\ x\leq0\end{cases}$$

تذكير

- f قابلة للإشتقاق على مجال I إذا كانت قابلة للإشتقاق في كل نقطة من I .
- كل دالة حدودية قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$.
- كل دالة جذرية قابلة للإشتقاق على حيز تعريفها.
- الدالتين $x\mapsto \cos x$ و $x\mapsto \sin x$ قابلتين للإشتقاق على $\mathbb{R}$.
- الدالة $x\mapsto \tan x$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\}$.
- مشتقة دالة مركبة :

إذا كانت f قابلة للإشتقاق على مجال I و g قابلة للإشتقاق على مجال J بحيث : $f(I)\subset J$ فإن الدالة gof قابلة للإشتقاق على I , و $(\forall x\in I)\ (gof)'(x)=g'(f(x))\times f'(x)$

- مشتقة الدالة العكسية :

لتكن f متصلة و رتيبة قطعا على مجال I .

إذا كانت f قابلة للإشتقاق على I بحيث : $(\forall x\in I)\ f'(x)\neq0$

فإن الدالة f^{-1} قابلة للإشتقاق على $J=f(I)$.

$$\begin{cases} f \text{ قابلة للإشتقاق في } x_0\\ f'(x_0)\neq0\\ y_0=f(x_0)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f^{-1} \text{ قابلة للإشتقاق في } y_0\\ (f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}\end{cases}$$

جدول الدوال المشتقة للدوال الإعتيادية

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$\cos x$	$-\sin x$	a	0
$\sin x$	$\cos x$	$ax+b$	a
$\tan x$	$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$	ax^n	nax^{n-1} $n\in\mathbb{N}^*$
$\cos(ax+b)$	$-a\sin(ax+b)$	ax^r	rax^{r-1} $r\in\mathbb{Q}^*$.
$\sin(ax+b)$	$a\cos(ax+b)$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\tan(ax+b)$	$\frac{a}{\cos^2(ax+b)}$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

العمليات على الدوال المشتقة

$f(x)$	$f'(x)$
$u(x)+v(x)$	$u'(x)+v'(x)$
$k\,u(x)$	$k\,u'(x)$
$u(x)v(x)$	$u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$
$(u(x))^r$	$r(u(x))^{r-1}\times u'(x)$
$\sqrt{u(x)}$	$\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
$\frac{u(x)}{v(x)}$	$\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$
$(u\circ v)(x)$	$u'(v(x))\times v'(x)$

6

حدد $f'(x)$ بدون تحديد مجموعة تعريفها في كل من الحالات التالية:

1) $f(x)=4x^2+24x+10^4$

2) $f(x)=5x^4-2x^3+10\sqrt{x}+\frac{2}{x}$

3) $f(x)=x^4+\frac{1}{x^4}$

4) $f(x)=\frac{x+1}{x^2+x+1}$

الجواب

1) لدينا $f(x)=4x^2+24x+10^4$

$$f'(x)=8x+24$$

2) لدينا $f(x)=5x^4-2x^3+10\sqrt{x}+\frac{2}{x}$

$$f'(x)=20x^3-8x^2+\frac{5}{2\sqrt{x}}-\frac{2}{x^2}$$

3) لدينا $f(x)=x^4+\frac{1}{x^4}$

$$f'(x)=4x^3-\frac{4x^3}{x^8}$$

$$f'(x)=4x^3-\frac{4}{x^5}$$

4) لدينا $f(x)=\frac{x+1}{x^2+x+1}$

$$f'(x)=\frac{(x+1)'(x^2+x+1)-(x+1)(x^2+x+1)'}{(x^2+x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{x^2+x+1-(x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-x^2-2x}{x^2+x+1}$$

7

حدد $f'(x)$ في كل من الحالات التالية:

1) $f(x)=\sqrt{x}(2x^2+7x+4)$

2) $f(x)=(1-2x)^5$

3) $f(x)=(x^2+x+1)^{3/2}$

الجواب 1) لدينا $f(x)=\sqrt{x}(2x^2+7x+4)$

$$f'(x)=(\sqrt{x})'(2x^2+7x+4)+\sqrt{x}(2x^2+7x+4)'$$

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}(2x^2+7x+4)+\sqrt{x}(4x+7)$$

$$f'(x)=\frac{2x^2+7x+4+8x^2+21x}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x)=\frac{10x^2+21x+4}{2\sqrt{x}}$$

2) لدينا $f(x)=(1-2x)^5$

$$f'(x)=5(1-2x)^4\cdot(1-2x)'$$

$$f'(x)=-10(1-2x)^4$$

3) لدينا $f(x)=(x^2+x+1)^{3/2}$

$$f'(x)=\frac{3}{2}(x^2+x+1)^{1/2}\cdot(x^2+x+1)'$$

$$f'(x)=\frac{3}{2}(x^2+x+1)^{1/2}(2x+1)$$

8

حدد $f'(x)$ في كل من الحالات التالية :

1) $f(x)=\sqrt{x^2-3x+5}$

2) $f(x)=\sqrt{\frac{3x-1}{3x+1}}$

3) $f(x)=\sqrt[3]{x^2-2x}+\sqrt[4]{4x+1}$

4) $f(x)=\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-4x+5}}$

الجواب 1) لدينا $f(x)=\sqrt{x^2-3x+5}$

$$f'(x)=\frac{(x^2-3x+5)'}{2\sqrt{x^2-3x+5}}=\frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+5}}$$

2) لدينا $f(x)=\sqrt{\frac{3x-1}{3x+1}}$

$$f'(x)=\frac{\left(\frac{3x-1}{3x+1}\right)'}{2\sqrt{\frac{3x-1}{3x+1}}}=\frac{\frac{6}{(3x+1)^2}}{2\sqrt{\frac{3x-1}{3x+1}}}$$

ومنه $f'(x)=\frac{3}{(3x+1)^2}\sqrt{\frac{3x+1}{3x-1}}$

3) لدينا $f(x)=\sqrt[3]{x^2-2x}+\sqrt[4]{4x+1}$

$$f(x)=(x^2-2x)^{1/3}+(4x+1)^{1/4}$$

$$f'(x)=\frac{1}{3}(x^2-2x)^{-2/3}\cdot(x^2-2x)'+\frac{1}{4}(4x+1)^{-3/4}(4x+1)'$$

$$f'(x)=\frac{1}{3}(x^2-2x)^{-2/3}\cdot(2x-2)+(4x+1)^{-3/4}$$

$$f'(x)=\frac{2}{3}(x-1)\frac{1}{(x^2-2x)^{2/3}}+\frac{1}{(4x+1)^{3/4}}$$

ومنه $f'(x)=\frac{2}{3}\cdot\frac{x-1}{\sqrt[3]{(x^2-2x)^2}}+\frac{1}{\sqrt[4]{(4x+1)^3}}$

4) لدينا $f(x)=\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-4x+5}}$

$$f'(x)=\frac{(2x-1)'\sqrt{x^2-4x+5}-(2x-1)(\sqrt{x^2-4x+5})'}{(\sqrt{x^2-4x+5})^2}$$

$$f'(x)=\frac{2\sqrt{x^2-4x+5}-(2x-1)\frac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+5}}}{(\sqrt{x^2-4x+5})^2}$$

$$f'(x)=\frac{2(x^2-4x+5)-(2x-1)(x-2)}{(\sqrt{x^2-4x+5})^3}$$

ومنه $f'(x)=\frac{-3x+8}{(\sqrt{x^2-4x+5})^3}$

9 حدد $f'(x)$ في كل من الحالات التالية :

1) $f(x)=\dfrac{1+2\cos x}{2-\sin x}+3\tan^2 x$

2) $f(x)=\dfrac{3}{2}\cos 2x-\dfrac{4}{5}\sin 5x+\tan 2x$

3) $f(x)=\cos\left(\dfrac{x-1}{2x+3}\right)$

الجواب

1) لدينا $f(x)=\dfrac{1+2\cos x}{2-\sin x}+3\tan^2 x$

$$f'(x)=\frac{(1+2\cos x)'(2-\sin x)-(1+2\cos x)(2-\sin x)'}{(2-\sin x)^2}+6\tan x(\tan x)'$$

$$f'(x)=\frac{-2\sin x(2-\sin x)+\cos x(1+2\cos x)}{(2-\sin x)^2}+6\tan x(1+\tan^2 x)$$

$$f'(x)=\frac{-4\sin x+\cos x+2}{(2-\sin x)^2}+6\tan x(1+\tan^2 x)$$

2) لدينا $f(x)=\dfrac{3}{2}\cos 2x-\dfrac{4}{5}\sin 5x+\tan 2x$

$$f'(x)=\frac{3}{2}\cdot -2\sin 2x-\frac{4}{5}\cdot 5\cos 5x+2(1+\tan^2 2x)$$

ومنه $f'(x)=-3\sin 2x-4\cos 5x+2(1+\tan^2 2x)$

3) لدينا $f(x)=\cos\left(\dfrac{x-1}{2x+3}\right)$

$$f'(x)=\left(-\sin\left(\frac{x-1}{2x+3}\right)\right)\cdot\left(\frac{x-1}{2x+3}\right)'$$

$$f'(x)=-\frac{5}{(2x+3)^2}\sin\left(\frac{x-1}{2x+3}\right)$$

تذكير

$f(x)$	$f'(x)$
$\cos(u(x))$	$-u'(x)\sin(u(x))$
$\sin(u(x))$	$u'(x)\cos(u(x))$
$\tan(u(x))$	$u'(x)(1+\tan^2(u(x)))$

الدوال الأصلية

* لتكن f و F دالتين عدديتين معرفتين على مجال I .

F دالة أصلية للدالة f على I $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} F \text{ قابلة للاشتقاق على } I \\ (\forall x\in I)\quad F'(x)=f(x) \end{cases}$

* إذا كانت F و G دالتين أصليتين على مجال I فإنه

$$(\exists k\in\mathbb{R})\ (\forall x\in I)\quad G(x)=F(x)+k$$

* إذا كانت F و G دالتين أصليتين لدالتين f و g على التوالي على I و λ عدد حقيقي فإن $F+G$ و λF دالتين أصليتين للدالتين $f+g$ و λf على I بالتوالي .

* كل دالة متصلة على مجال I تقبل دالة أصلية على I .

جدول الدوال الأصلية للدوال الإعتيادية

$f(x)$	$F(x)$	I
a	$ax+C$	$\mathbb{R}$
$(n\in\mathbb{N}^*)\quad x^n$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C$	$\mathbb{R}$
$(r\in\mathbb{Q}^*\setminus\{-1\})\quad x^r$	$\dfrac{x^{r+1}}{r+1}+C$	$\mathbb{R}_+^*$
$-\dfrac{1}{x^2}$	$\dfrac{1}{x}+C$	$\mathbb{R}_-^*$ أو $\mathbb{R}_+^*$
$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}+C$	$\mathbb{R}_+^*$
$\cos x$	$\sin x+C$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x+C$	$\mathbb{R}$
$1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x+C$	$\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[_{k\in\mathbb{Z}}$
$(u(x))^r\times u'(x)$	$\dfrac{(u(x))^{r+1}}{r+1}+C$	/
$-\dfrac{u'(x)}{(u(x))^2}$	$\dfrac{1}{u(x)}+C$	/
$\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$	$\sqrt{u(x)}+C$	/

1

حدد دالة أصلية للدالة f على المجال I في كل من الحالات التالية :

1) $f(x)=x^2+4x-3$ و $I=\mathbb{R}$

2) $f(x)=\frac{x^5}{10}-\frac{x^3}{4}-2x+5$ و $I=\mathbb{R}$

3) $f(x)=2x-1+\frac{1}{x^2}$ و $I=\mathbb{R}_-^*$

4) $f(x)=x^3-3x-1+\frac{3}{\sqrt{x}}$ و $I=\mathbb{R}_+^*$

الجواب

1) لدينا $f(x)=x^2+4x-3$, $I=\mathbb{R}$

لتكن F دالة أصلية للدالة f على المجال I .

إذن $F(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{4}{2}x^2-3x$

$F(x)=\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x$

2) لدينا $f(x)=\frac{x^5}{10}-\frac{x^3}{4}-2x+5$, $I=\mathbb{R}$

$F(x)=\frac{1}{10}\times\frac{x^6}{6}-\frac{1}{4}\times\frac{x^4}{4}-2\times\frac{x^2}{2}+5x$

$F(x)=\frac{x^6}{60}-\frac{x^4}{16}-x^2+5x$

3) لدينا $f(x)=2x-1+\frac{1}{x^2}$ و $I=\mathbb{R}_-^*$

إذن $F(x)=2\times\frac{x^2}{2}-x-\frac{1}{x}$

$F(x)=x^2-x-\frac{1}{x}$

4) لدينا $f(x)=x^3-3x-1+\frac{3}{\sqrt{x}}$ و $I=\mathbb{R}_+^*$

$f(x)=x^3-3x-1+6\times\frac{1}{2\sqrt{x}}$

إذن $F(x)=\frac{x^4}{4}-3\times\frac{x^2}{2}-x+6\sqrt{x}$

$F(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{3}{2}x^2-x+6\sqrt{x}$

الدالة $x\mapsto\frac{x^{n+1}}{n+1}$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto x^n$ على $\mathbb{R}$ $(n\in\mathbb{N}^*)$

2

حدد الدالة الأصلية F للدالة f على المجال I بحيث: $F(x_0)=y_0$ في كل من الحالات التالية :

1) $f(x)=2x(x^2+1)^3$ ، $\begin{cases}x_0=0\\ y_0=-1\end{cases}$ ، $I=\mathbb{R}$

2) $f(x)=(2x+1)(x^2+x+1)^2$ ، $\begin{cases}x_0=1\\ y_0=2\end{cases}$ ، $I=\mathbb{R}$

3) $f(x)=\frac{2}{(3x+1)^3}$ ، $\begin{cases}x_0=0\\ y_0=\end{cases}$ ، $I=[0,1]$

4) $f(x)=\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$ ، $\begin{cases}x_0=0\\ y_0=0\end{cases}$ ، $I=\mathbb{R}$

الجواب

لتكن F الدالة الأصلية للدالة f على I بحيث $F(x_0)=y_0$

1) لدينا $f(x)=2x(x^2+1)^3$

نعلم أن $x\mapsto\frac{(u(x))^{n}}{n+1}$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto(u(x))^n.u'(x)$

$f(x)=(x^2+1)^3.(x^2+1)'$

ومنه $F(x)=\frac{(x^2+1)^4}{4}+k$ / $k\in\mathbb{R}$

بما أن $F(0)=-1$ فإن $4+k=-1$ أي $k=5$

ومنه $F(x)=\frac{(x^2+1)^4}{4}+5$ $(\forall x\in\mathbb{R})$

2) لدينا $f(x)=(2x+1)(x^2+x+1)^2$

$f(x)=(x^2+x+1)^2.(x^2+x+1)'$

ومنه $F(x)=\frac{(x^2+x+1)^3}{3}+k$ / $k\in\mathbb{R}$

بما أن $F(1)=2$ فإن $9+k=2$ أي $k=-7$

ومنه $F(x)=\frac{(x^2+x+1)^3}{3}-7$ $(\forall x\in\mathbb{R})$

3) لدينا $f(x)=\frac{2}{(3x+1)^3}$

$f(x)=2(3x+1)^{-3}$

$f(x)=\frac{2}{3}(3x+1)^{-3}.(3x+1)'$

ومنه $F(x)=\frac{2}{3}\times\frac{(3x+1)^{-2}}{-2}+k$ / $k\in\mathbb{R}$

إذن $F(x) = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(3x+1)^2} + k$

بما أن $F(0)=\frac{2}{3}$ فإن $-\frac{1}{3}+k=\frac{2}{3}$ أي $k=1$

ومنه $F(x) = -\frac{1}{3(3x+1)^2}+1$ $\quad(\forall x\in[0,1])$

4) لدينا $f(x)=\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$

$$= -\left(-\frac{(x^2+x+1)'}{(x^2+x+1)^2}\right)$$

ومنه $F(x) = -\frac{1}{x^2+x+1}+k$

(لأن $x\mapsto \frac{1}{u(x)}$ هي دالة أصلية للدالة: $x\mapsto -\frac{u'(x)}{(u(x))^2}$)

بما أن $F(0)=0$ فإن $-1+k=0$ أي $k=1$

ومنه $F(x)=\frac{-1}{x^2+x+1}+1$

أي $F(x)=\frac{x^2+x}{x^2+x+1}$ $\quad(\forall x\in\mathbb{R})$

3 حدد دالة أصلية F للدالة f على المجال I في كل من الحالات التالية:

1) $f(x)=\frac{x+1}{2\sqrt{x}}+\sqrt{x}$ $\quad I=\mathbb{R}_+^*$

2) $f(x)=(x^3-2x^2+x-1)\sqrt{x}$ $\quad I=\mathbb{R}_+$

3) $f(x)=\sqrt[3]{2x-3}$ $\quad I=[2,+\infty[$

4) $f(x)=(2x+1)\sqrt[5]{x^2+x+1}$ $\quad I=\mathbb{R}$

الجواب

1) لدينا $f(x)=\frac{x+1}{2\sqrt{x}}+\sqrt{x}$ $\quad I=\mathbb{R}_+^*$

$$f(x)=\frac12(x+1)x^{-\frac12}+x^{\frac12}$$

$$f(x)=\frac12 x^{\frac12}+\frac12 x^{-\frac12}+x^{\frac12}$$

$$f(x)=\frac32 x^{\frac12}+\frac12 x^{-\frac12}$$

ومنه $F(x)=\frac32\cdot\frac{x^{3/2}}{3/2}+\frac12\cdot\frac{x^{1/2}}{1/2}$

$$F(x)=x^{3/2}+x^{1/2}$$

ومنه $F(x)=x\sqrt{x}+\sqrt{x}$

أي $F(x)=\sqrt{x}(x+1)$ $\quad\forall x\in\mathbb{R}_+^*$

2) لدينا $f(x)=(x^3-2x^2+x-1)\sqrt{x}$ $\quad I=\mathbb{R}_+$

$$f(x)=(x^3-2x^2+x-1).x^{1/2}$$

$$f(x)=x^{7/2}-2x^{5/2}+x^{3/2}-x^{1/2}$$

ومنه $F(x)=\frac{x^{9/2}}{9/2}-2\frac{x^{7/2}}{7/2}+\frac{x^{5/2}}{5/2}-\frac{x^{3/2}}{3/2}$

$$F(x)=\frac29x^4\sqrt{x}-\frac47x^3\sqrt{x}+\frac25x^2\sqrt{x}-\frac23x\sqrt{x}$$

$F(x)=\left(\frac29x^4-\frac47x^3+\frac25x^2-\frac23x\right)\sqrt{x}$ $\quad\forall x\in\mathbb{R}_+$

3) $f(x)=\sqrt[3]{2x-3}$ $\quad I=[2,+\infty[$

ومنه $f(x)=(2x-3)^{1/3}$

$$f(x)=\frac12(2x-3)^{1/3}\cdot(2x-3)'$$

$$F(x)=\frac12\cdot\frac{(2x-3)^{4/3}}{4/3}$$

ومنه $F(x)=\frac38(2x-3)\sqrt[3]{2x-3}$ $\quad\forall x\in[2,+\infty[$

4) لدينا $f(x)=(2x+1)\sqrt[5]{x^2+x+1}$ $\quad I=\mathbb{R}$

$$f(x)=(x^2+x+1)^{1/5}\cdot(x^2+x+1)'$$

ومنه $F(x)=\frac{(x^2+x+1)^{6/5}}{6/5}$

أي $F(x)=\frac56(x^2+x+1)\sqrt[5]{x^2+x+1}$ $\quad\forall x\in\mathbb{R}$

4 نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $]-\infty,\frac32]$ بما يلي: $f(x)=x^2\sqrt{3-2x}$

1) أ- تحقق من أن لكل x من $]-\infty,\frac32]$: $4x^2=(3-2x)^2-6(3-2x)+9$

ب- استنتج أن $f(x)=\frac14(3-2x)^{\frac52}-\frac32(3-2x)^{\frac32}+\frac94(3-2x)^{\frac12}$

2) حدد دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty,\frac32]$.

الجواب 1) أ- لدينا :

$$(3-2x)^2-6(3-2x)+9=9-12x+4x^2-18+12x+9$$

$$(3-2x)^2-6(3-2x)+9=4x^2$$

إذن : $f(x)=x^2\sqrt{3-2x}=\frac{1}{4}\left(4x^2(3-2x)^{\frac{1}{2}}\right)$

ب- لدينا : $f(x)=\frac{1}{4}\left((3-2x)^2-6(3-2x)+9\right)(3-2x)^{\frac{1}{2}}$

$$f(x)=\frac{1}{4}(3-2x)^{\frac{5}{2}}-\frac{6}{4}(3-2x)^{\frac{3}{2}}+\frac{9}{4}(3-2x)^{\frac{1}{2}}$$

إذن : $f(x)=\frac{1}{4}(3-2x)^{\frac{5}{2}}-\frac{3}{2}(3-2x)^{\frac{3}{2}}+\frac{9}{4}(3-2x)^{\frac{1}{2}}$

2) لدينا : $f(x)=\frac{1}{4}(3-2x)^{\frac{5}{2}}-\frac{3}{2}(3-2x)^{\frac{3}{2}}+\frac{9}{4}(3-2x)^{\frac{1}{2}}$ $\left(\forall x\in\left]-\infty;\frac{3}{2}\right]\right)$

تذكير

الدالة $x\mapsto\frac{(ax+b)^{r+1}}{a(r+1)}$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto(ax+b)^r$ على مجال ضمن مجموعة تعريفها .

لتكن F دالة أصلية للدالة f على المجال $\left]-\infty;\frac{3}{2}\right]$.

لدينا $F(x)=\frac{1}{4}\times\frac{(3-2x)^{\frac{7}{2}}}{-2\times\frac{7}{2}}-\frac{3}{2}\times\frac{(3-2x)^{\frac{5}{2}}}{-2\times\frac{5}{2}}+\frac{9}{4}\times\frac{(3-2x)^{\frac{3}{2}}}{-2\times\frac{3}{2}}$

$$F(x)=-\frac{1}{28}(3-2x)^{\frac{7}{2}}+\frac{3}{10}(3-2x)^{\frac{5}{2}}-\frac{3}{4}(3-2x)^{\frac{3}{2}}$$

$$F(x)=(3-2x)\sqrt{3-2x}\left(-\frac{1}{28}(3-2x)^2+\frac{3}{10}(3-2x)+\frac{3}{4}\right)$$

5

حدد دالة أصلية للدالة f على المجال I في كل من الحالات التالية :

1) $f(x)=3\cos 2x+8\sin 3x$ و $I=\mathbb{R}$

2) $f(x)=\cos^3x\sin x+3\sin^4x\cos x$ و $I=\mathbb{R}$

3) $f(x)=\frac{3}{\cos^2x}+x$ و $I=\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

4) $f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{3+\cos x}}$ و $I=\mathbb{R}$

الجواب 1) لدينا : $f(x)=3\cos 2x+8\sin 3x$ و $I=\mathbb{R}$

$$F(x)=\frac{3}{2}\sin 2x-\frac{8}{3}\cos 3x$$

2) لدينا $f(x)=\cos^3x\sin x+3\sin^4x\cos x$ $\quad I=\mathbb{R}$

$$f(x)=-\cos^3x(\cos x)'+3\sin^4x(\sin x)'$$

ومنه $F(x)=-\frac{\cos^4x}{4}+3\,\frac{\sin^5x}{5}$

أي $F(x)=-\frac{1}{4}\cos^4x+\frac{3}{5}\sin^5x$

3) لدينا $f(x)=\frac{3}{\cos^2x}+x$ $\quad I=\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

ومنه $F(x)=3\tan x+\frac{x^2}{2}$

4) لدينا $f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{3+\cos x}}=-2\times\frac{(3+\cos x)'}{2\sqrt{3+\cos x}}$ $\quad I=\mathbb{R}$

ومنه $F(x)=-2\sqrt{3+\cos x}$

6

حدد دالة أصلية F للدالة f على المجال I في كل حالة من الحالات التالية :

1) $f(x)=\cos^3x$ $\quad I=\mathbb{R}$

2) $f(x)=\sin^3x$ $\quad I=\mathbb{R}$

3) $f(x)=\cos^2x$ $\quad I=\mathbb{R}$

4) $f(x)=\sin^2x$ $\quad I=\mathbb{R}$

الجواب 1) لدينا $f(x)=\cos^3x$ $\quad I=\mathbb{R}$

$$f(x)=\cos^2x\cos x$$

$$f(x)=(1-\sin^2x)\cos x$$

$$f(x)=\cos x-\sin^2x\cos x$$

$$f(x)=\cos x-\sin^2x(\sin x)'$$

ومنه $F(x)=\sin x-\frac{\sin^3x}{3}$

2) لدينا $f(x)=\sin^3x$ $\quad I=\mathbb{R}$

$$f(x)=\sin^2x\sin x$$

$$f(x)=(1-\cos^2x)\sin x$$

$f(x) = \sin x - \cos^2 x \sin x$

$f(x) = \sin x + \cos^2 x (\cos x)'$

ومنه $F(x) = -\cos x + \dfrac{\cos^3 x}{3}$

3) لدينا $f(x) = \cos^2 x$ $\quad I = \mathbb{R}$

نعلم أن $1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$

إذن $f(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$

ومنه $F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x$

4) لدينا $f(x) = \sin^2 x$ $\quad I = \mathbb{R}$

نعلم أن $1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$

إذن $f(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$

ومنه $F(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x$

7 حدد دالة أصلية F للدالة f على المجال I في كل من الحالتين التاليتين :

1) $f(x) = \cos^4 x$ $\quad I = \mathbb{R}$

2) $f(x) = \sin^4 2x$ $\quad I = \mathbb{R}$

الجواب

1) لدينا $f(x) = \cos^4 x$ $\quad I = \mathbb{R}$

الطريقة 1 لدينا

$$f(x) = (\cos^2 x)^2$$
$$= \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^4$$
$$= \frac{1}{4}(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x)$$
$$= \frac{1}{4}\left(1 + 2\cos 2x + \frac{1}{2}(1 + \cos 4x)\right)$$
$$= \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$$

ومنه $F(x) = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{16}\sin 4x$

الطريقة 2 لدينا

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} \sin nx = \frac{1}{2i}(e^{inx} - e^{-inx}) \\ \cos nx = \frac{1}{2}(e^{inx} + e^{-inx}) \end{cases}$$

لدينا $f(x) = \cos^4 x = \left(\frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})\right)^4$

$$f(x) = \frac{1}{16}\left((e^{ix})^4 + 4(e^{ix})^3 e^{-ix} + 6(e^{ix})^2(e^{-ix})^2 + 4e^{ix}(e^{-ix})^3 + (e^{-ix})^4\right)$$
$$= \frac{1}{16}\left(e^{4ix} + 4e^{2ix} + 6 + 4e^{-2ix} + e^{-4ix}\right)$$
$$= \frac{1}{16}\left[(e^{4ix} + e^{-4ix}) + 4(e^{2ix} + e^{-2ix}) + 6\right]$$
$$= \frac{1}{16}(2\cos 4x + 8\cos 2x + 6)$$
$$= \frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}$$

ومنه $F(x) = \frac{1}{16}\sin 4 + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{8}x$

2) لدينا $f(x) = \sin^4 2x$ $\quad I = \mathbb{R}$

الطريقة 1

$$f(x) = (\sin^2 2x)^2$$
$$f(x) = \left(\frac{1 - \cos 4x}{2}\right)^2$$
$$f(x) = \frac{1}{4}(1 - 2\cos 4x + \cos^2 4x)$$
$$f(x) = \frac{1}{4}\left(1 - 2\cos 4x + \frac{1}{2}(1 + \cos 8x)\right)$$
$$f(x) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 4x + \frac{1}{8}\cos 8x$$

ومنه $F(x) = \frac{3}{8}x - \frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{64}\sin 8x$

الطريقة 2 لدينا $\sin 2x = \frac{1}{2i}(e^{2ix} - e^{-2ix})$

$$f(x) = \left(\frac{1}{2i}(e^{2ix} - e^{-2ix})\right)^4$$
$$f(x) = \frac{1}{16}\left((e^{2ix})^4 - 4(e^{2ix})^3 e^{-2ix} + 6(e^{2ix})^2(e^{-2ix})^2 - 4e^{2ix}(e^{-2ix})^3 + (e^{-2ix})^4\right)$$

$$f(x)=\frac{1}{16}\left[(e^{8ix}+e^{-8ix})-4(e^{4ix}+e^{-4ix})+6\right]$$

$$f(x)=\frac{1}{16}\left(2\cos 8x-8\cos 4x+6\right)$$

$$f(x)=\frac{1}{8}\cos 8x-\frac{1}{2}\cos 4x+\frac{3}{8}$$

ومنه $F(x)=\frac{1}{64}\sin 8x-\frac{1}{8}\sin 4x+\frac{3}{8}x$

8

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي :

$$f(x)=\cos 2x\sin 3x$$

حدد الدالة الأصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$ بحيث $F(0)=-1$

الجواب لدينا $f(x)=\cos 2x\sin 3x$

$$f(x)=\left[\frac{1}{2}(e^{2ix}+e^{-2ix})\right]\left[\frac{1}{2i}(e^{3ix}-e^{-3ix})\right]$$

$$f(x)=\frac{1}{4i}(e^{2ix}+e^{-2ix})(e^{3ix}-e^{-3ix})$$

$$f(x)=\frac{1}{4i}(e^{5ix}-e^{-ix}+e^{ix}-e^{-5ix})$$

$$f(x)=\frac{1}{4i}\left[(e^{5ix}-e^{-5ix})+(e^{ix}-e^{-ix})\right]$$

$$f(x)=\frac{1}{4i}(2i\sin 5x+2i\sin x)$$

$$f(x)=\frac{1}{2}\sin 5x+\frac{1}{2}\sin x$$

ومنه $F(x)=-\frac{1}{10}\cos 5x-\frac{1}{2}\cos x+k$

بما أن $F(0)=-1$ فإن $-\frac{1}{10}-\frac{1}{2}+k=-1$

إذن $k=\frac{8}{5}$

وبالتالي $F(x)=-\frac{1}{10}\cos 5x-\frac{1}{2}\cos x+\frac{8}{5}$

9

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي :

$$f(x)=|x|+|x+1|$$

1) بين أن الدالة f تقبل دالة أصلية على $\mathbb{R}$.

2) حدد الدالة الأصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$ بحيث $F(0)=0$

الجواب 1) بما أن f دالة متصلة على $\mathbb{R}$ فإن f تقبل دالة أصلية على $\mathbb{R}$.

2) لدينا

$$\begin{cases} f(x)=-2x-1 & , x\leq -1 \\ f(x)=1 & , -1<x\leq 0 \\ f(x)=2x+1 & , x>0 \end{cases}$$

بما أن F قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و $\forall x\in\mathbb{R}\ F'(x)=f(x)$

فإن

$$\begin{cases} F(x)=-x^2-x+c_1 & , x\leq -1 \\ F(x)=x+c_2 & , -1<x\leq 0 \\ F(x)=x^2+x+c_3 & , x>0 \end{cases}$$

حيث $(c_1,c_2,c_3)\in\mathbb{R}^3$

بما أن F دالة متصلة على $\mathbb{R}$ فإن F متصلة في النقطتين $x_0=-1$ و $x_1=0$.

إذن $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}}F(x)=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}F(x)=F(-1)$

$$\Leftrightarrow -1+1+c_1=-1+c_2 \Leftrightarrow c_1=c_2-1$$

$$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}F(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}F(x)=F(0)\Leftrightarrow c_2=c_3=0$$

ومنه $c_1=-1$ و $c_2=c_3=0$

وبالتالي

$$\begin{cases} F(x)=-x^2-x-1 & , x\leq -1 \\ F(x)=x & , -1<x\leq 0 \\ F(x)=x^2+x & , x>0 \end{cases}$$

تمارين للبحث

1

حدد دالة أصلية F للدالة f على مجال I يتم تحديده في كل من الحالات التالية :

1) $f(x)=3x^2+5x+2+\frac{1}{x^2}$

2) $f(x)=x+\sqrt{x}+\frac{2}{x^3}$

3) $f(x)=(x-2)\sqrt{x}$

4) $f(x)=(x^2+x+1)\sqrt[3]{x}$

2

حدد دالة أصلية F للدالة f على مجال I يتم تحديده في كل من الحالات التالية :

1) $f(x)=(x^2-3x+4)^3(2x-3)$

2) $f(x)=(x-\sqrt{x})(1-\frac{1}{2\sqrt{x}})$

3) $f(x)=(6x^2+1)\sqrt{3x^3+x+1}$

4) $f(x)=(2x+1)\sqrt[3]{x^2+x+1}$

5) $f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+3}}$

3

حدد دالة أصلية للداله f على مجال I يتم تحديده.

1) $f(x)=\cos 3x-7\sin 2x$

2) $f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}+\sin 3x$

3) $f(x)=\sin^7 x\cos x+3\cos^2 x\sin x$

4) $f(x)=\frac{3\cos x}{(3-\sin x)^2}$

5) $f(x)=\cos^5 x-3\sin^4 x$

6) $f(x)=\sin^2 2x\cos 3x$

4

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي :

$$f(x)=x\sqrt{x+1}$$

1) بين أن لكل x من $]-1,+\infty[$

$$f(x)=(x+1)^{\frac{3}{2}}-(x+1)$$

2) استنتج الدالة الأصلية F للدالة f على $]-1,+\infty[$ بحيث $F(0)=\frac{1}{15}$.

5

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي .

$$f(x)=|x+5|-|3-x|+2x-3$$

1) بين أن الدالة f تقبل دالة أصلية على $\mathbb{R}$.

2) حدد الدالة الأصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$ بحيث $F(0)=0$.

6

ليكن n عدد صحيح طبيعي غير منعدم .

نضع

$$A_n(x)=1+2x+\dots\dots+nx^{n-1}$$

$$B_n(x)=1\times2+2\times3x+3\times4x+\dots\dots+n(n+1)x^{n-1}$$

$$C_n(x)=1+1^2x+2^2x^2+\dots\dots+n^2x^2$$

1) حدد الدالة الأصلية F_n للدالة $A_n(x)$ بحيث $F_n(0)=1$

2) بين أن $B_n(x)=A'_{n+1}(x)$

$$C_n(x)=1+xA_n(x)+x^2A'_n(x)$$

3) استنتج تعابير لكل من $B_n(x)$ و $C_n(x)$.

7

نعتبر الدالتين العدديتين f و F للمتغير الحقيقي x المعرفتين بمايلي :

$F(x)=\sqrt{4-x^2}$ و $f(x)=\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$ ، $x\in]-2,2[$

1) بين أن F دالة أصلية للدالة f على $]-2,2[$.

2) حدد الدالة الأصلية G للدالة f على $]-2,2[$ بحيث : $G(-1)=7$.

$$f(x)=\frac{1}{16}\left[(e^{8ix}+e^{-8ix})-4(e^{4ix}+e^{-4ix})+6\right]$$

$$f(x)=\frac{1}{16}\left(2\cos 8x-8\cos 4x+6\right)$$

$$f(x)=\frac{1}{8}\cos 8x-\frac{1}{2}\cos 4x+\frac{3}{8}$$

ومنه $F(x)=\frac{1}{64}\sin 8x-\frac{1}{8}\sin 4x+\frac{3}{8}x$

8

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي:

$$f(x)=\cos 2x\sin 3x$$

حدد الدالة الأصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$ بحيث $F(0)=-1$

الجواب لدينا $f(x)=\cos 2x\sin 3x$

$$f(x)=\left[\frac{1}{2}(e^{2ix}+e^{-2ix})\right]\left[\frac{1}{2i}(e^{3ix}-e^{-3ix})\right]$$

$$f(x)=\frac{1}{4i}(e^{2ix}+e^{-2ix})(e^{3ix}-e^{-3ix})$$

$$f(x)=\frac{1}{4i}(e^{5ix}-e^{-ix}+e^{ix}-e^{-5ix})$$

$$f(x)=\frac{1}{4i}\left[(e^{5ix}-e^{-5ix})+(e^{ix}-e^{-ix})\right]$$

$$f(x)=\frac{1}{4i}(2i\sin 5x+2i\sin x)$$

$$f(x)=\frac{1}{2}\sin 5x+\frac{1}{2}\sin x$$

ومنه $F(x)=-\frac{1}{10}\cos 5x-\frac{1}{2}\cos x+k$

بما أن $F(0)=-1$ فإن $-\frac{1}{10}-\frac{1}{2}+k=-1$

إذن $k=\frac{8}{5}$

وبالتالي $F(x)=-\frac{1}{10}\cos 5x-\frac{1}{2}\cos x+\frac{8}{5}$

9

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي:

$$f(x)=|x|+|x+1|$$

1) بين أن الدالة f تقبل دالة أصلية على $\mathbb{R}$.

2) حدد الدالة الأصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$ بحيث $F(0)=0$

الجواب 1) بما أن f دالة متصلة على $\mathbb{R}$ فإن f تقبل دالة أصلية على $\mathbb{R}$.

2) لدينا

$$\begin{cases} f(x)=-2x-1 & , x\leq -1\\ f(x)=1 & , -1<x\leq 0\\ f(x)=2x+1 & , x>0\end{cases}$$

بما أن F قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و $\forall x\in\mathbb{R}\ F'(x)=f(x)$

فإن

$$\begin{cases} F(x)=-x^2-x+c_1 & , x\leq -1\\ F(x)=x+c_2 & , -1<x\leq 0\\ F(x)=x^2+x+c_3 & , x>0\end{cases}$$

حيث $(c_1,c_2,c_3)\in\mathbb{R}^3$

بما أن F دالة متصلة على $\mathbb{R}$ فإن F متصلة في النقطتين $x_0=-1$ و $x_1=0$.

إذن $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}}F(x)=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}F(x)=F(-1)$

$$\Leftrightarrow -1+1+c_1=-1+c_2 \Leftrightarrow c_1=c_2-1$$

$$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}F(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}F(x)=F(0)\Leftrightarrow c_2=c_3=0$$

ومنه $c_2=c_3=0$ و $c_1=-1$

وبالتالي

$$\begin{cases} F(x)=-x^2-x-1 & , x\leq -1\\ F(x)=x & , -1<x\leq 0\\ F(x)=x^2+x & , x>0\end{cases}$$

تمارين للبحث

1

حدد دالة أصلية F للدالة f على مجال I يتم تحديده في كل من الحالات التالية :

1) $f(x)=3x^2+5x+2+\frac{1}{x^2}$

2) $f(x)=x+\sqrt{x}+\frac{2}{x^3}$

3) $f(x)=(x-2)\sqrt{x}$

4) $f(x)=(x^2+x+1)\sqrt[3]{x}$

2

حدد دالة أصلية F للدالة f على مجال I يتم تحديده في كل من الحالات التالية :

1) $f(x)=(x^2-3x+4)^3(2x-3)$

2) $f(x)=(x-\sqrt{x})(1-\frac{1}{2\sqrt{x}})$

3) $f(x)=(6x^2+1)\sqrt{3x^3+x+1}$

4) $f(x)=(2x+1)\sqrt[3]{x^2+x+1}$

5) $f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+3}}$

3

حدد دالة أصلية للداله f على مجال I يتم تحديده.

1) $f(x)=\cos 3x-7\sin 2x$

2) $f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}+\sin 3x$

3) $f(x)=\sin^7 x\cos x+3\cos^2 x\sin x$

4) $f(x)=\frac{3\cos x}{(3-\sin x)^2}$

5) $f(x)=\cos^5 x-3\sin^4 x$

6) $f(x)=\sin^2 2x\cos 3x$

4

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي :

$$f(x)=x\sqrt{x+1}$$

1) بين أن لكل x من $]-1,+\infty[$

$$f(x)=(x+1)^{\frac{3}{2}}-(x+1)$$

2) استنتج الدالة الأصلية F للدالة f على $]-1,+\infty[$ بحيث $F(0)=\frac{1}{15}$.

5

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي .

$$f(x)=|x+5|-|3-x|+2x-3$$

1) بين أن الدالة f تقبل دالة أصلية على $\mathbb{R}$.

2) حدد الدالة الأصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$ بحيث $F(0)=0$.

6

ليكن n عدد صحيح طبيعي غير منعدم .

نضع

$$A_n(x)=1+2x+\dots\dots+nx^{n-1}$$

$$B_n(x)=1\times2+2\times3x+3\times4x+\dots\dots+n(n+1)x^{n-1}$$

$$C_n(x)=1+1^2x+2^2x^2+\dots\dots+n^2x^2$$

1) حدد الدالة الأصلية F_n للدالة $A_n(x)$ بحيث $F_n(0)=1$

2) بين أن $B_n(x)=A'_{n+1}(x)$

$$C_n(x)=1+xA_n(x)+x^2A'_n(x)$$

3) استنتج تعابير لكل من $B_n(x)$ و $C_n(x)$.

7

نعتبر الدالتين العدديتين f و F للمتغير الحقيقي x المعرفتين بمايلي :

$F(x)=\sqrt{4-x^2}$ و $f(x)=\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$ ؛ $x\in]-2,2[$

1) بين أن F دالة أصلية للدالة f على $]-2,2[$.

2) حدد الدالة الأصلية G للدالة f على $]-2,2[$ بحيث : $G(-1)=7$.

دراسة الدوال

دراسة الدوال العددية

لتكن f دالة عددية قابلية للاشتقاق على مجال I .

- f تزايدية على المجال I $\iff$ $f'(x) \geq 0$ $(\forall x \in I)$
- f تناقصية على المجال I $\iff$ $f'(x) \leq 0$ $(\forall x \in I)$
- f ثابتة على المجال I $\iff$ $f'(x) = 0$ $(\forall x \in I)$

تقعر ونقط انعطاف منحنى $(\mathscr{C}_f)$

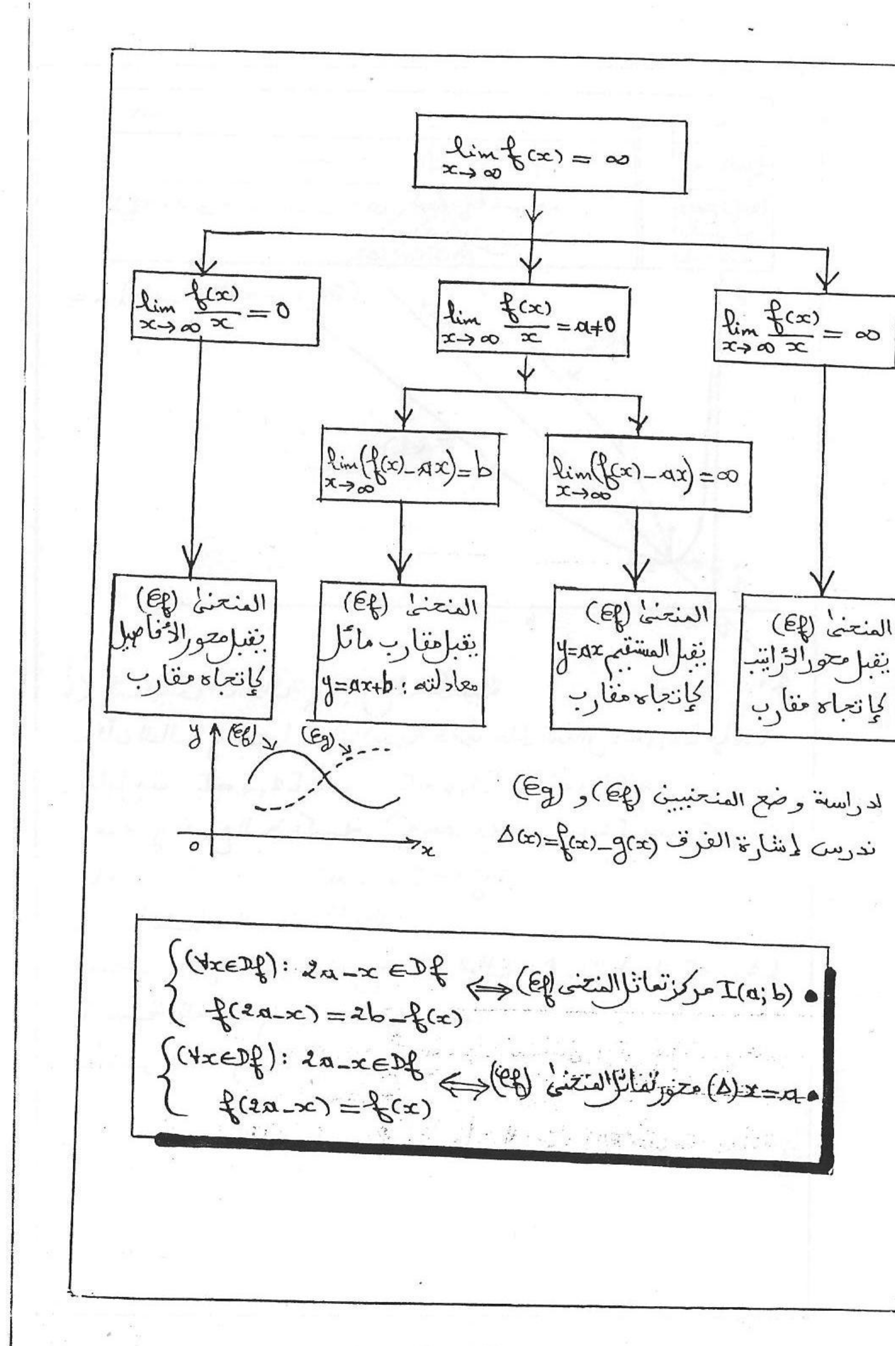
y, $(\mathscr{C}_f)$, $f(x_0)$, M_0, 0, x_0, x

لتكن f دالة قابلة للإشتقاق مرتين على مجال I .

- إذا كان لكل x من I : $f''(x) \geq 0$ فإن المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ محدب أي أن المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ متجه نحو الأعلى .
- إذا كان لكل x من I : $f''(x) \leq 0$ فإن المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ مقعر أي أن المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ متجه نحو الأسفل .
- إذا كانت الدالة f'' تنعدم مع تغيير الإشارة في x_0 فإن النقطة $I(x_0; f(x_0))$ نقطة انعطاف المنحنى $(\mathscr{C}_f)$.
- إذا كانت الدالة f' تنعدم في x_0 بدون تغيير الإشارة فإن النقطة $I(x_0; f(x_0))$ نقطة انعطاف المنحنى $(\mathscr{C}_f)$.

الفروع اللانهائية

- إذا كان $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ فإن المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مقارب عمودي معادلته : $x = x_0$.
- إذا كان $\lim_{x \to x_0} f(x) = b$ فإن المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مقارب أفقي معادلته : $y = b$.
- إذا كان $\lim_{x \to \infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$ فإن المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مقارب مائل معادلته : $y = ax + b$.



1 نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي :

$$f(x) = x - \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

ليكن (C_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) أ- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$

ب- حدد الفرعين اللانهائيين للمنحنى (C_f).

2) أ- بين أن لكل x من $]0,+\infty[$

$$f'(x) = \left(\frac{2x+\sqrt{x}+1}{2x\sqrt{x}}\right)(\sqrt{x}-1)$$

ب- أعط جدول تغيرات الدالة f.

3) أ- أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) ذي المعادلة : $y=x$.

ب- أنشئ المنحنى (C_f) (نأخذ : $f(4)=\frac{5}{2}$ و $f(\frac{1}{4})=\frac{7}{4}$)

4) لتكن g قصور الدالة f على المجال $[1,+\infty[$.

أ- بين أن g تقبل دالة عكسية g^{-1} محددا مجموعة تعريفها.

ب- أنشئ المنحنى $(C_{g^{-1}})$ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

الجواب

1) أ- حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x}-1)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$

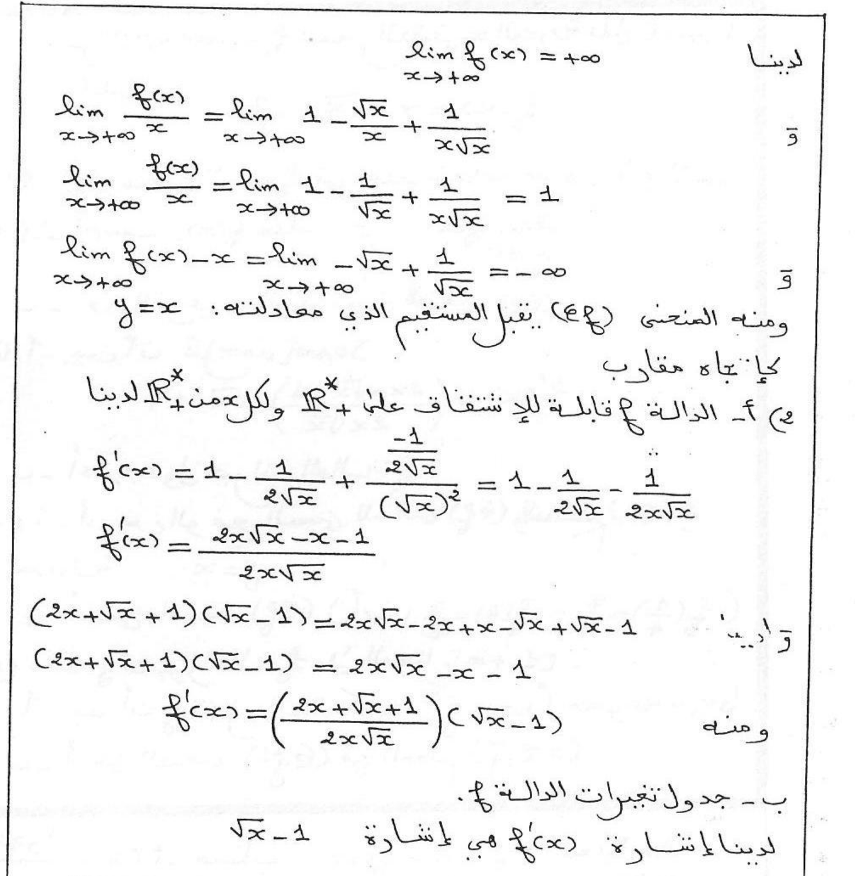
فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x}-1)+\frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

وبما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} x-\sqrt{x} = 0$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

فإن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$

ب- تحديد الفرعين اللانهائيين للمنحنى (C_f).

بما أن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$ فإن المنحنى (C_f) يقبل مقارب عمودي معادلته $x=0$.



لدينا $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

و $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{\sqrt{x}}{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}}$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x\sqrt{x}} = 1$

و $\lim_{x\to+\infty} f(x)-x = \lim_{x\to+\infty} -\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = -\infty$

ومنه المنحنى (C_f) يقبل المستقيم الذي معادلته: $y=x$ كاتجاه مقارب

2) أ- الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ ولكل x من $\mathbb{R}_+^*$ لدينا

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{\frac{-1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2} = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \frac{2x\sqrt{x} - x - 1}{2x\sqrt{x}}$$

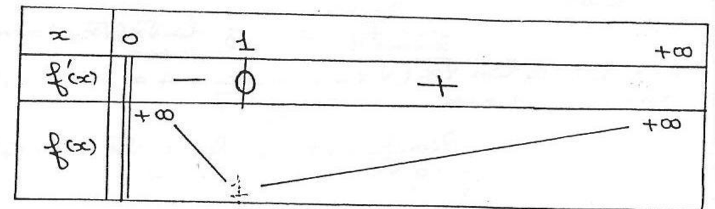
ولدينا $(2x+\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1) = 2x\sqrt{x} - 2x + x - \sqrt{x} + \sqrt{x} - 1$

$(2x+\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1) = 2x\sqrt{x} - x - 1$

ومنه $f'(x) = \left(\frac{2x+\sqrt{x}+1}{2x\sqrt{x}}\right)(\sqrt{x}-1)$

ب- جدول تغيرات الدالة f.

لدينا إشارة $f'(x)$ هي إشارة $\sqrt{x}-1$

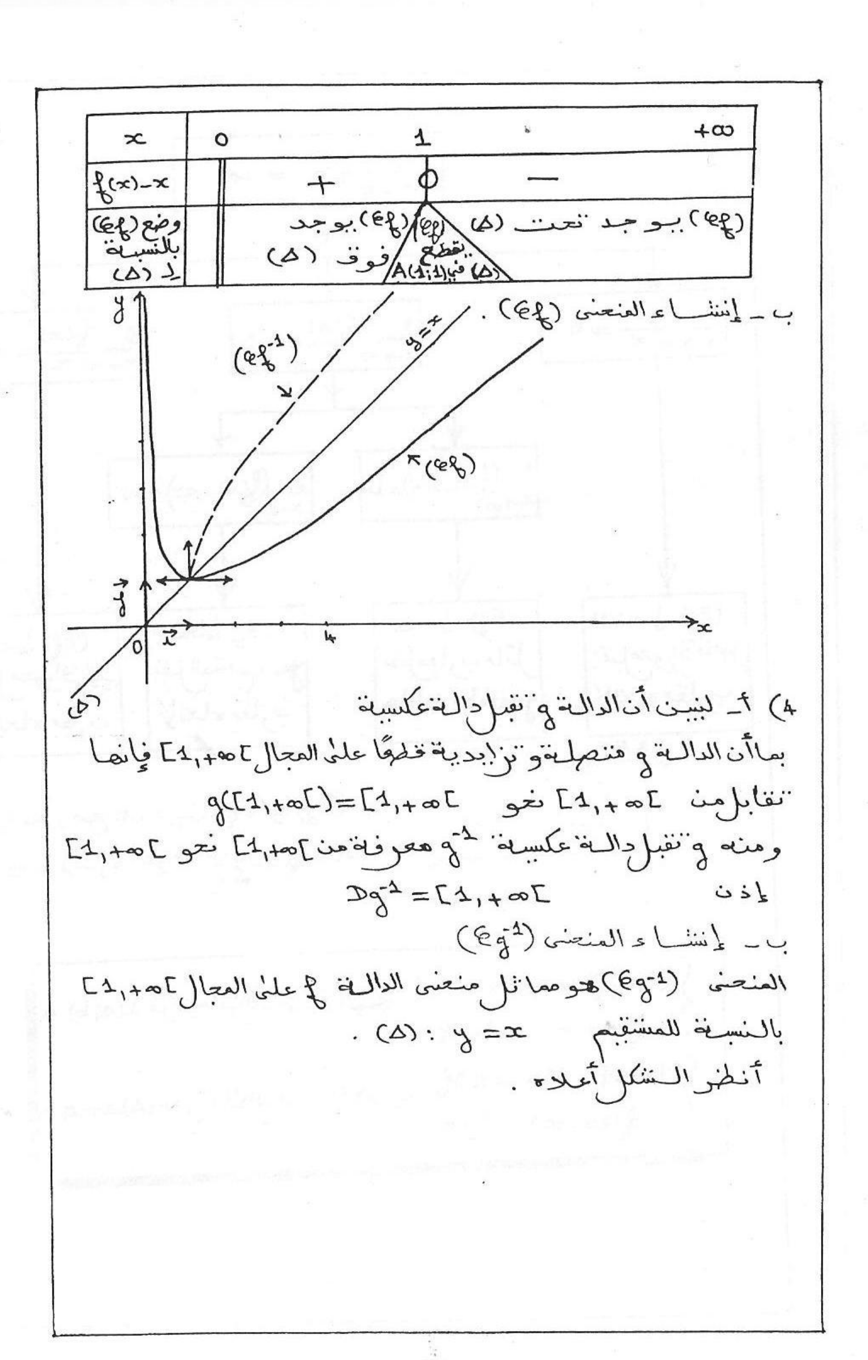


x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

3) أ- دراسة وضع المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ).

ليكن x عدداً من $\mathbb{R}_+^*$ لدينا $f(x)-x = \frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} = \frac{1-x}{\sqrt{x}}$

إشارة $f(x)-x$ هي إشارة $1-x$ ومنه



x	0		1		$+\infty$
$f(x)-x$	‖	$+$	0	$-$	
وضع (C_f) بالنسبة لـ (Δ)	‖	(C_f) يوجد فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في $A(1;1)$	(C_f) يوجد تحت (Δ)	

ب- إنشاء المنحنى (C_f).

4) أ- لنبين أن الدالة g تقبل دالة عكسية

بما أن الدالة g متصلة و تزايدية قطعا على المجال $[1,+\infty[$ فإنها تقابل من $[1,+\infty[$ نحو $g([1,+\infty[)=[1,+\infty[$

ومنه g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة من $[1,+\infty[$ نحو $[1,+\infty[$

إذن $D_{g^{-1}} = [1,+\infty[$

ب- إنشاء المنحنى $(C_{g^{-1}})$

المنحنى $(C_{g^{-1}})$ هو مماثل منحنى الدالة f على المجال $[1,+\infty[$ بالنسبة للمستقيم $(\Delta): y=x$.

أنظر الشكل أعلاه.

2

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي :

$$f(x) = \frac{x}{2}\left(x + \sqrt{x^2+4}\right)$$

وليكن (C_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2) أ- بين أن لكل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \dfrac{(x+\sqrt{x^2+4})^2}{2\sqrt{x^2+4}}$

ب- أستنتج تغيرات الدالة f .

3) أ- أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f) .

ب- أعط معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الأفصول $x_0=0$.

ج- أنشئ المنحنى (C_f) .

4) أ- بين أن الدالة f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو مجال J يتم تحديده .

ب- بين أن لكل x من J : $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$

ج- أحسب $(f^{-1})'(0)$.

د- أنشئ المنحنى $(C_{f^{-1}})$ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

الجواب 1) حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

لدينا

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{2}\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{2}\times\frac{(x+\sqrt{x^2+4})(x-\sqrt{x^2+4})}{x-\sqrt{x^2+4}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{2}\times\frac{-4}{x-\sqrt{x^2+4}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{2}\times\frac{-4}{x\left(1+\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-4}{2\left(1+\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}\right)} = -1$$

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} x+\sqrt{x^2+4} = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{2} = +\infty$

فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2) أ- لدينا f دالة قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولكل x من $\mathbb{R}$ لدينا

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2+4}\right) + \frac{x}{2}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\right)$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+4}\,(x+\sqrt{x^2+4}) + x(\sqrt{x^2+4}+x)}{2\sqrt{x^2+4}}$$

$$f'(x) = \frac{(x+\sqrt{x^2+4})(x+\sqrt{x^2+4})}{2\sqrt{x^2+4}}$$

ومنه

$$f'(x) = \frac{(x+\sqrt{x^2+4})^2}{2\sqrt{x^2+4}}$$

ب- لدينا لكل x من $\mathbb{R}$ $f'(x) > 0$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	-1 $\nearrow$ $+\infty$

3) أ- تحديد الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f)

بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$ فإن المنحنى (C_f) يقبل مقارب أفقي معادلته: $y=-1$ بجوار $-\infty$.

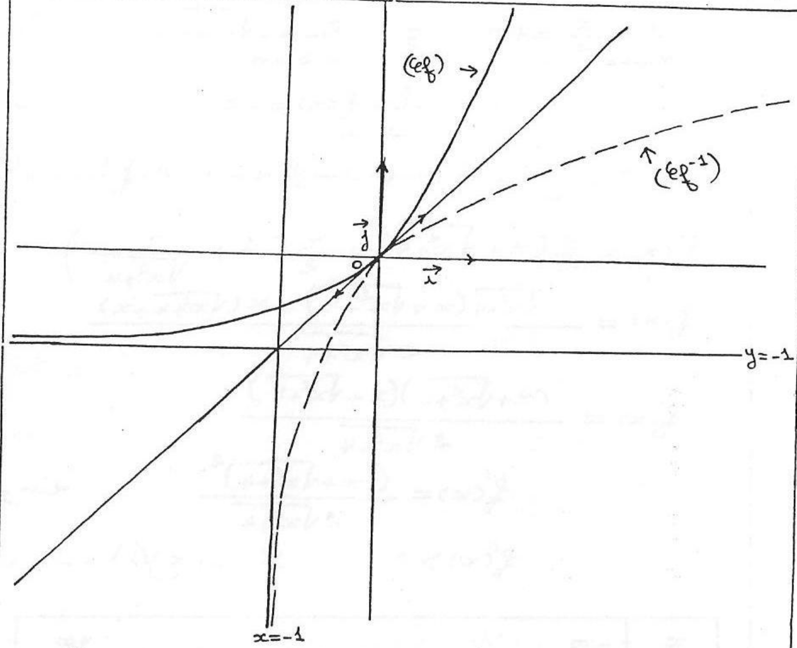
لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

و بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2+4}\right) = +\infty$

فإن المنحنى (C_f) يقبل محور الأراتيب كإتجاه مقارب بجوار $+\infty$

ب- معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الأفصول $x_0=0$

هي: $y = f'(0)(x-0) + f(0)$ أي $(T): y = x$



4) أ- بما أن f متصلة وتزايدية قطعًا على $\mathbb{R}$ فإنها تقابل من $\mathbb{R}$ نحو $J=f(\mathbb{R})=]-1,+\infty[$ وتقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة من J نحو $\mathbb{R}$.

ب- لدينا

$$\begin{cases} y=f^{-1}(x) \\ x\in J \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=f(y) \\ y\in\mathbb{R} \end{cases}$$

$$x=f(y) \Leftrightarrow x=\frac{y}{2}\left(y+\sqrt{y^2+4}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2x-y^2=y\sqrt{y^2+4}$$

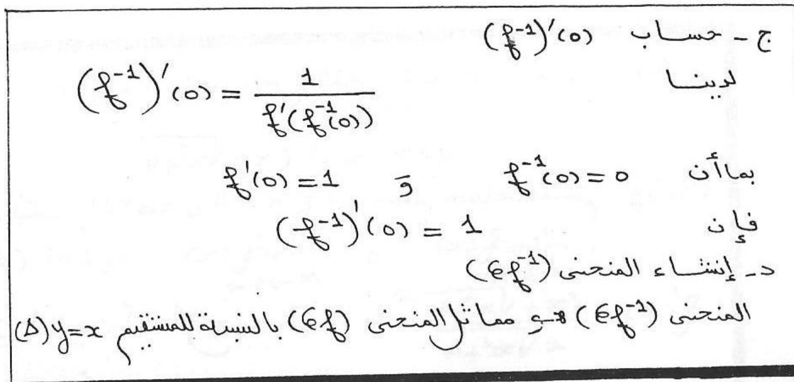
$$\Leftrightarrow 4x^2-4xy^2+y^4=y^4+4y^2$$

$$\Leftrightarrow 4y^2(x+1)=4x^2$$

$$\Leftrightarrow y^2=\frac{x^2}{x+1} \quad (x+1>0 \text{ لأن})$$

$$\Leftrightarrow |y|=\frac{|x|}{\sqrt{x+1}}$$

بما أن x و y لهما نفس الإشارة فإن $f^{-1}(x)=\frac{x}{\sqrt{x+1}}$



ج- حساب $(f^{-1})'(0)$

لدينا

$$(f^{-1})'(0)=\frac{1}{f'(f^{-1}(0))}$$

بما أن $f^{-1}(0)=0$ و $f'(0)=1$

فإن $(f^{-1})'(0)=1$

د- إنشاء المنحنى $(C_{f^{-1}})$

المنحنى $(C_{f^{-1}})$ هو مماثل المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم $(\Delta)\ y=x$

3

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي:

$$f(x)=x+\sqrt{x^2+2x}$$

1) حدد D_f حيز تعريف الدالة f ثم احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

2) بين أن $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-1$ وأول النتيجة هندسيا.

3) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليسار في $x_0=-1$ وعلى اليمين في $x_1=0$.

4) أ- بين أنه لكل x من $]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[$ لدينا:

$$f'(x)=\frac{x+1+\sqrt{x^2+2x}}{\sqrt{x^2+2x}}$$

ب- استنتج أن الدالة f تزايدية قطعًا على $[0,+\infty[$ وتناقصية قطعًا على $]-\infty,-2]$.

5) ليكن (C_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

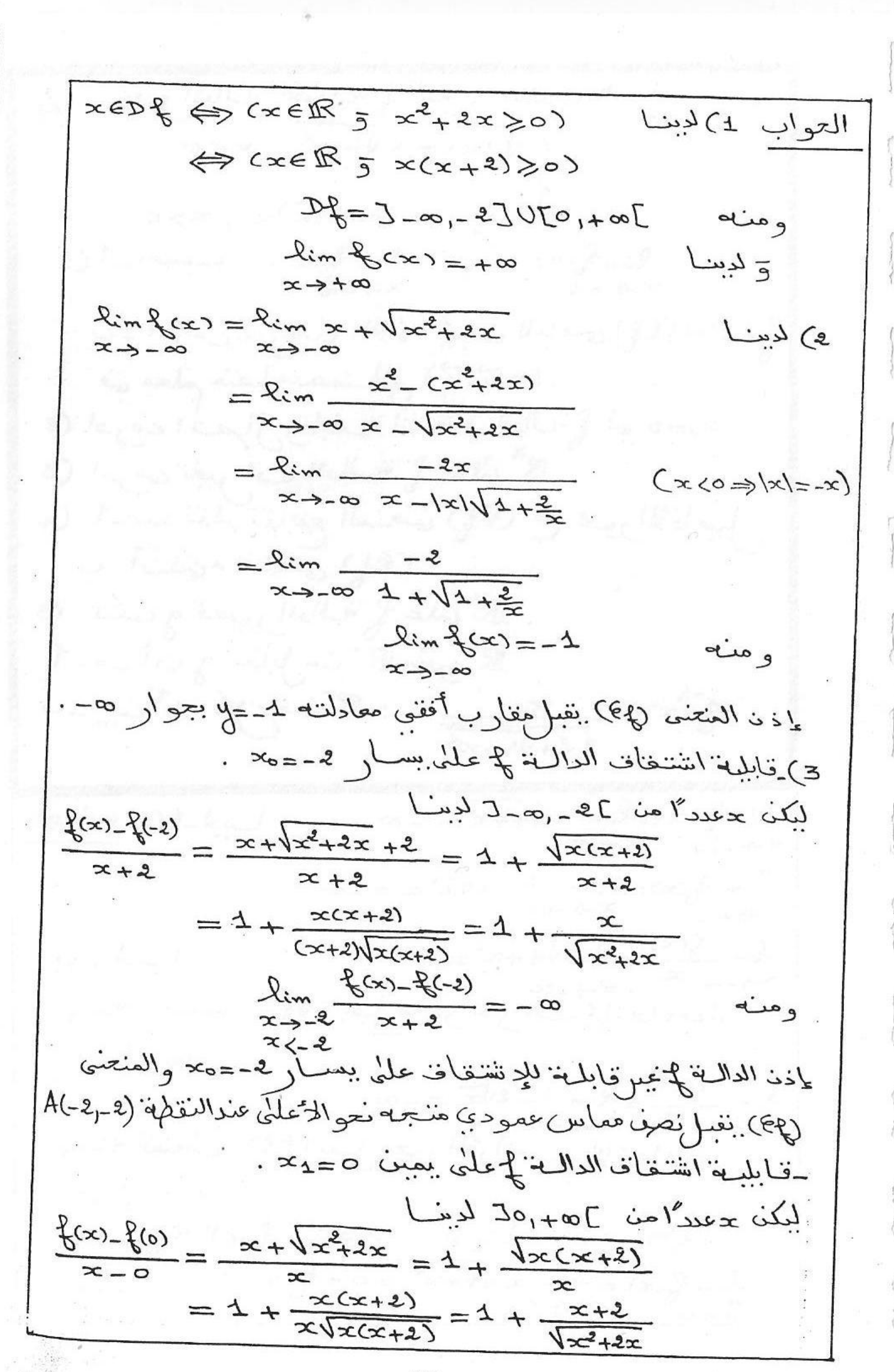
أ- بين أن المستقيم ذو المعادلة: $y=2x+1$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

ب- أنشئ المنحنى (C_f).

6) ليكن g قصور الدالة f على المجال $I=[0,+\infty[$.

أ- بين أن g تقابل من I نحو مجال J يتم تحديده.

ب- لكل x من J حدد $g^{-1}(x)$ بدلالة x (g^{-1} هي الدالة العكسية للدالة g)



الجواب 1) لدينا $x \in D_f \Leftrightarrow (x\in\mathbb{R}$ و $x^2+2x \geq 0)$

$\Leftrightarrow (x\in\mathbb{R}$ و $x(x+2)\geq 0)$

ومنه $D_f =]-\infty,-2]\cup[0,+\infty[$

و لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2) لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x+\sqrt{x^2+2x}$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-(x^2+2x)}{x-\sqrt{x^2+2x}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-2x}{x-|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}}} \quad (x<0 \Rightarrow |x|=-x)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-2}{1+\sqrt{1+\frac{2}{x}}}$$

ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$

إذن المنحنى (C_f) يقبل مقارب أفقي معادلته $y=-1$ بجوار $-\infty$.

3) قابلية اشتقاق الدالة f على يسار $x_0=-2$.

ليكن x عدداً من $]-\infty,-2[$ لدينا

$$\frac{f(x)-f(-2)}{x+2} = \frac{x+\sqrt{x^2+2x}+2}{x+2} = 1+\frac{\sqrt{x(x+2)}}{x+2}$$

$$=1+\frac{x(x+2)}{(x+2)\sqrt{x(x+2)}} = 1+\frac{x}{\sqrt{x^2+2x}}$$

ومنه $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} \frac{f(x)-f(-2)}{x+2} = -\infty$

إذن الدالة f غير قابلة للإشتقاق على يسار $x_0=-2$ والمنحنى (C_f) يقبل نصف مماس عمودي متجه نحو الأعلى عند النقطة $A(-2,-2)$.

- قابلية اشتقاق الدالة f على يمين $x_1=0$.

ليكن x عدداً من $]0,+\infty[$ لدينا

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x+\sqrt{x^2+2x}}{x} = 1+\frac{\sqrt{x(x+2)}}{x}$$

$$=1+\frac{x(x+2)}{x\sqrt{x(x+2)}} = 1+\frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x}}$$

ومنه $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=+\infty$

إذن الدالة f غير قابلة للإشتقاق على يمين $x_1=0$ والمنحنى (C_f) يقبل نصف مماس عمودي متجه نحو الأعلى عند النقطة $O(0,0)$.

4) أ- الدالة f قابلة للاشتقاق على $]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[$

لكل x من $]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[$ لدينا

$$f'(x)=1+\frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x}} = 1+\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}$$

ومنه $f'(x)=\frac{x+1+\sqrt{x^2+2x}}{\sqrt{x^2+2x}}$

ب- * لكل x من $]0,+\infty[$ لدينا $\sqrt{x^2+2x}>0$ و $x+1+\sqrt{x^2+2x}>0$

إذن $f'(x)>0$ ومنه الدالة f تزايدية قطعاً على $[0,+\infty[$

* ليكن x من $]-\infty,-2[$ لدينا $f'(x)=\frac{x+1+\sqrt{x^2+2x}}{\sqrt{x^2+2x}}$

$$f'(x)=\frac{(x+1)^2-(x^2+2x)}{\sqrt{x^2+2x}\,(x+1-\sqrt{x^2+2x})} = \frac{1}{\sqrt{x^2+2x}\,(x+1-\sqrt{x^2+2x})}$$

بما أن $\sqrt{x^2+2x}>0$ و $x+1-\sqrt{x^2+2x}<0$

فإن $f'(x)<0$ ومنه الدالة f تناقصية قطعاً على $]-\infty,-2[$

جدول تغيرات الدالة f.

x	$-\infty$ -2		0 $+\infty$
$f'(x)$	$-$	//////	$+$
$f(x)$	$-1 \searrow -2$	//////	$0 \nearrow +\infty$

5) أ- لنبين أن المستقيم ذو المعادلة $y=2x+1$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$ أي أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(2x+1)=0$.

لدينا $f(x)-(2x+1)=\sqrt{x^2+2x}-(x+1)$

$$=\frac{(x^2+2x)-(x+1)^2}{\sqrt{x^2+2x}+(x+1)}=\frac{-1}{\sqrt{x^2+2x}+x+1}$$

ومنه $\lim_{x\to+\infty} f(x)-(2x+1)=0$

إذن المنحنى (C_f) يقبل مقارب مائل معادلته $y=2x+1$ بجوار $+\infty$

ب- إنشاء المنحنى (C_f).

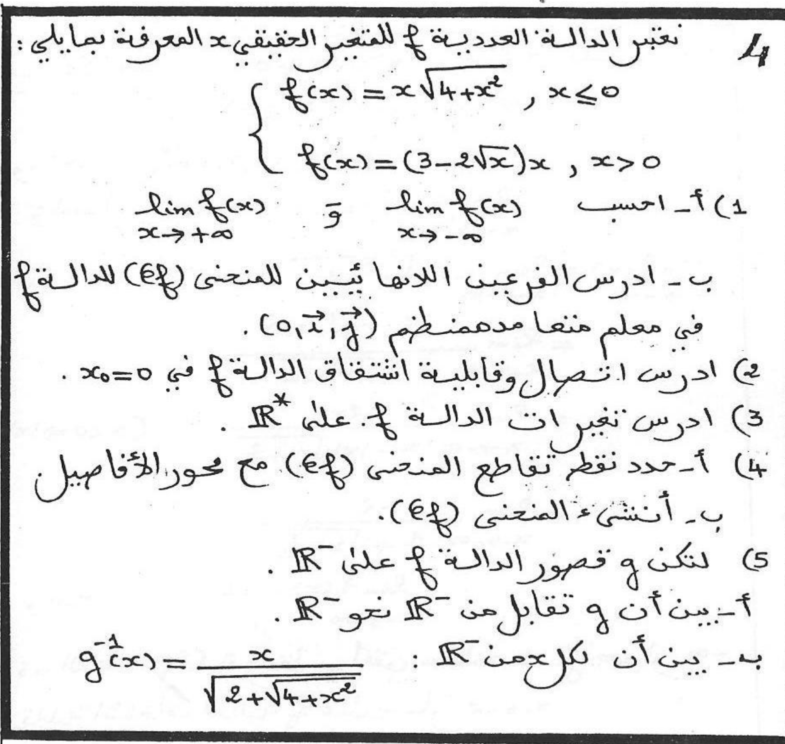
6) أ- بما أن الدالة g متصلة وتزايدية قطعًا على $I=[0,+\infty[$ فإنها تقابل من I نحو $J=g(I)=[0,+\infty[$ وتقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة من J نحو I.

ب- لدينا

$$\begin{cases} y=g^{-1}(x)\\ x\in J\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=g(y)\\ y\in I\end{cases}$$

$$x=g(y) \Leftrightarrow x=y+\sqrt{y^2+2y}$$
$$\Leftrightarrow (x-y)^2=y^2+2y$$
$$\Leftrightarrow x^2-2xy+y^2=y^2+2y$$
$$\Leftrightarrow y(2x+2)=x^2$$
$$\Leftrightarrow y=\frac{x^2}{2x+2}$$ (لأن $2+2x\neq 0$)

ومنه $g^{-1}(x)=\frac{x^2}{2x+2}$ $(\forall x\in J)$



4 نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=x\sqrt{4+x^2}, & x\le 0\\ f(x)=(3-2\sqrt{x})x, & x>0\end{cases}$$

1) أ- احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

ب- ادرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى (C_f) للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

2) ادرس اتصال وقابلية اشتقاق الدالة f في $x_0=0$.

3) ادرس تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}^*$.

4) أ- حدد نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع محور الأفاصيل

ب- أنشئ المنحنى (C_f).

5) لتكن g قصور الدالة f على $\mathbb{R}^-$.

أ- بين أن g تقابل من $\mathbb{R}^-$ نحو $\mathbb{R}^-$.

ب- بين أن لكل x من $\mathbb{R}^-$: $g^{-1}(x)=\frac{x}{\sqrt{2+\sqrt{4+x^2}}}$

الجواب 1) أ- لدينا $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x\sqrt{4+x^2}=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(3-2\sqrt{x})x=-\infty$

ب- لدينا $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{4+x^2}=+\infty$

ومنه المنحنى (C_f) يقبل محور الأراتيب كإتجاه مقارب بجوار $-\infty$.

لدينا $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty} 3-2\sqrt{x}=-\infty$

ومنه المنحنى (C_f) يقبل محور الأراتيب كإتجاه مقارب بجوار $+\infty$.

2) اتصال الدالة f في $x_0=0$. لدينا $f(0)=0$

لدينا $\lim_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to0\\x<0}} x\sqrt{4+x^2}=0=f(0)$

ولدينا $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}(3-2\sqrt{x})x = 0 = f(0)$

إذن $\lim\limits_{x\to0} f(x)=f(0)$ ومنه f دالة متصلة في $x_0=0$.

قابلية اشتقاق الدالة f في $x_0=0$.

$$\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{x\sqrt{4+x^2}}{x}=\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\sqrt{4+x^2}=2=f'_g(0)$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{(3-2\sqrt{x})x}{x}=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}3-2\sqrt{x}=1=f'_d(0)$$

بما أن $f'_d(0)\neq f'_g(0)$ فإن f غير قابلة للإشتقاق في $x_0=0$

والمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل نقطة مزواة $O(0,0)$

3) ليكن x من $]-\infty,0[$ لدينا $f(x)=x\sqrt{4+x^2}$

$$f'(x)=\sqrt{4+x^2}+x\cdot\frac{2x}{2\sqrt{4+x^2}}$$

$$f'(x)=\frac{4+2x^2}{\sqrt{4+x^2}}>0$$

ومنه f تزايدية قطعًا على $]-\infty,0[$

ليكن x من $]0,+\infty[$ لدينا $f(x)=(3-2\sqrt{x})x$

$$f'(x)=-\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot x+3-2\sqrt{x}=-\sqrt{x}+3-2\sqrt{x}$$

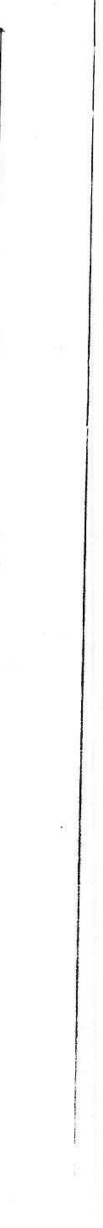
$$f'(x)=3(1-\sqrt{x})$$

جدول تغيرات الدالة f.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

4) أ- تقاطع المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ مع محور الأفاصيل:

$M(x,y)\in(\mathscr{C}_f)\cap(xx') \iff (y=f(x)$ و $y=0)$




$f(x)=0 \iff (x\sqrt{4+x^2}=0$ و $x\le0)$ أو $(3-2\sqrt{x}=0$ و $x>0)$

$\iff x=0$ أو $x=\frac{9}{4}$

ومنه $(\mathscr{C}_f)\cap(xx')=\left\{O(0,0),\ A(\frac{9}{4},0)\right\}$

ب- إنشاء المنحنى $(\mathscr{C}_f)$

5) أ- بما أن الدالة g متصلة وتزايدية قطعًا على $\mathbb{R}^-$ فإنها تقابل من $\mathbb{R}^-$ نحو $g(\mathbb{R}^-)=\mathbb{R}^-$ وتقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة من $\mathbb{R}^-$ نحو $\mathbb{R}^-$.

ب- لدينا

$$\begin{cases} y=g^{-1}(x)\\ x\in\mathbb{R}^-\end{cases} \iff \begin{cases} x=g(y)\\ y\in\mathbb{R}^-\end{cases}$$

$$x=g(y)\iff x=y\sqrt{4+y^2}$$
$$\iff x^2=4y^2+y^4$$
$$\iff x^2+4=y^4+2y^2+4=(y^2+2)^2$$
$$\iff \sqrt{x^2+4}=y^2+2$$

$$x = g(y) \Leftrightarrow y^2 = \sqrt{4+x^2} - 2$$
$$\Leftrightarrow y^2 = \frac{x^2}{\sqrt{4+x^2}+2}$$

بما أن x و y لهما نفس الإشارة فإن $y = \dfrac{x}{\sqrt{2+\sqrt{4+x^2}}}$

و بالتالي $\forall x \in \mathbb{R}^- \quad g^{-1}(x) = \dfrac{x}{\sqrt{2+\sqrt{4+x^2}}}$

5

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي:

$$f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$$

ليكن (C_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) أ- تحقق من أن f معرفة على $\mathbb{R}$.

ب- احسب نهاية f عند $+\infty$ وأول النتيجة هندسيا.

2) بين أن f دالة تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$.

3) أ- بين أن النقطة $I(1,0)$ مركز تماثل بالنسبة للمنحنى (C_f).

ب- اكتب معادلة ديكارتية لمماس المنحنى (C_f) في النقطة التي أفصولها $x_0 = 1$.

4) انشئ المنحنى (C_f).

5) أ- بين أن الدالة f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو مجال J يتم تحديده.

ب- احسب $(f^{-1})'(0)$.

ج- انشئ المنحنى $(C_{f^{-1}})$ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

الجواب

1) أ- بما أن $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 > 0$ لكل x من $\mathbb{R}$ فإن $D_f = \mathbb{R}$.

ب- لدينا

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}}$$

إذن

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}} = 1$$

ومنه المنحنى (C_f) يقبل مقارب أفقي معادلته: $y = 1$ بجوار $+\infty$.

2) الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولكل x من $\mathbb{R}$ لدينا

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2-2x+2} - \frac{(x-1)(2x-2)}{2\sqrt{x^2-2x+2}}}{\left(\sqrt{x^2-2x+2}\right)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2-2x+2)-(x^2-2x+1)}{\left(\sqrt{x^2-2x+2}\right)^3}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\left(\sqrt{x^2-2x+2}\right)^3} > 0$$

ومنه f تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$.

تذكير

* النقطة $\Omega(a,b)$ مركز تماثل المنحنى (C_f) $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f : 2a-x \in D_f \\ f(2a-x) = 2b - f(x) \end{cases}$

* المستقيم $(\Delta)\ x = a$ محور تماثل المنحنى (C_f) $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f : 2a-x \in D_f \\ f(2a-x) = f(x) \end{cases}$

3) أ- لنبين أن النقطة $I(1,0)$ مركز تماثل المنحنى (C_f)

أي أن $f(2-x) = -f(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$.

لدينا

$$f(2-x) = \frac{(2-x)-1}{\sqrt{(2-x)^2-2(2-x)+2}}$$

$$f(2-x) = \frac{1-x}{\sqrt{4-4x+x^2-4+2x+2}} = -\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$$

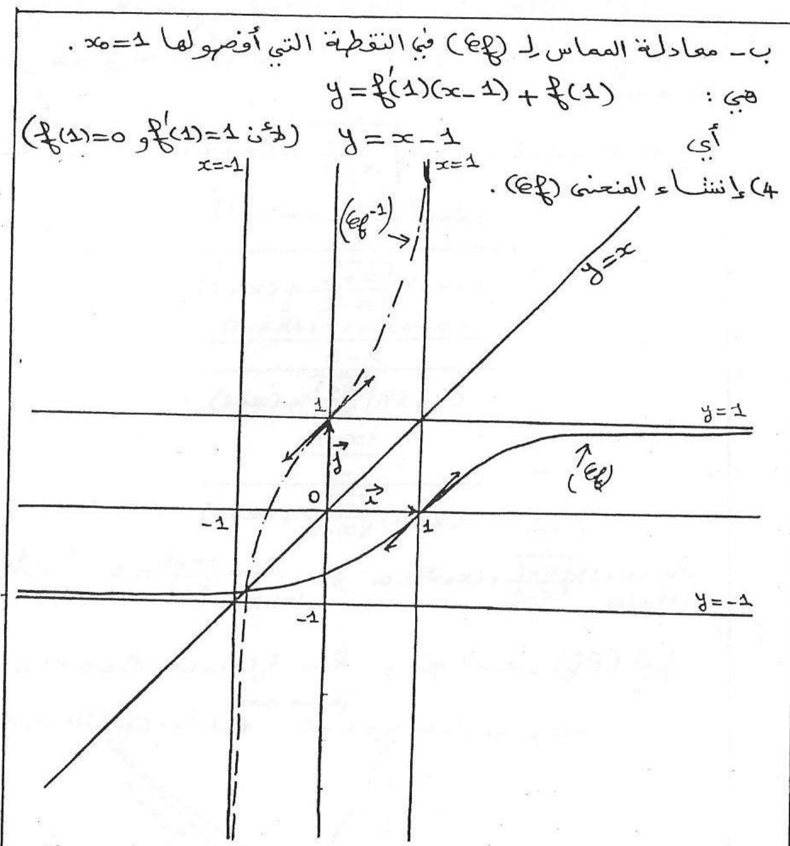
إذن $f(2-x) = -f(x)$ ومنه $I(1,0)$ مركز تماثل المنحنى (C_f)

ب- معادلة المماس لـ (C_f) في النقطة التي أفصولها $x_0=1$.

هي : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

أي $y = x - 1$ (لأن $f'(1)=1$ و $f(1)=0$)

4) إنشاء المنحنى (C_f) .



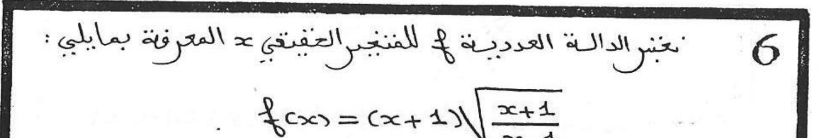
5) أ- بما أن f دالة متصلة وتزايدية قطعًا على $\mathbb{R}$ فإنها تقابل من $\mathbb{R}$ نحو $J=f(\mathbb{R})=]-1,1[$ وتقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة من $]-1,1[$ نحو $\mathbb{R}$.

ب- لدينا

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))}$$

بما أن $f^{-1}(0)=1$ و $f'(1)=1$ فإن $(f^{-1})'(0) = 1$

ج- المنحنى $(C_{f^{-1}})$ هو مماثل المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم الذي معادلته $y=x$ (انظر الشكل أعلاه)



6 نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي :

$$f(x) = (x+1)\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

1) أ- تحقق من أن $D_f =]-\infty,-1] \cup]1,+\infty[$

ب- احسب نهايات الدالة f عند محدات D_f .

2) أ- ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليسار في $x_0=-1$

ب- بين أن لكل x من $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)^2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}$$

ج- اعط جدول تغيرات الدالة f .

3) ليكن (C_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

أ- بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=x+2$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

ب- أنشئ المنحنى (C_f) .

الجواب

1) أ- لدينا $x \in D_f \Leftrightarrow (x\in\mathbb{R}$ و $x-1\neq 0$ و $\frac{x+1}{x-1} \geq 0)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{x+1}{x-1}$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

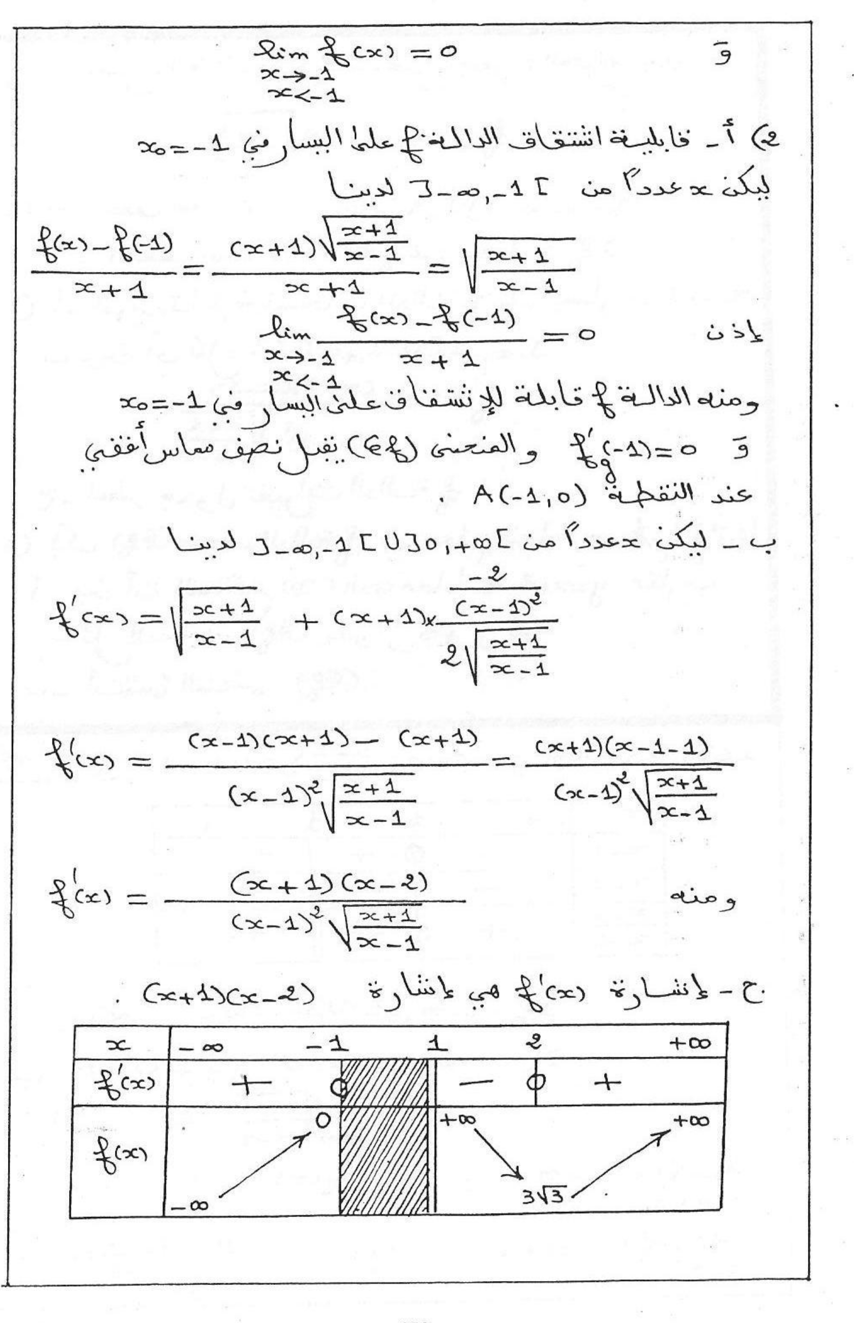
ومنه $D_f =]-\infty,-1] \cup]1,+\infty[$

ب- حساب نهايات الدالة عند محدات D_f .

بما أن $\lim\limits_{|x|\to+\infty} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = 1$

فإن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

بما أن $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = +\infty$ فإن $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = +\infty$



و $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} f(x) = 0$

2) أ- قابلية اشتقاق الدالة f على اليسار في $x_0=-1$

ليكن x عدداً من $]-\infty,-1[$ لدينا

$$\frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \frac{(x+1)\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}{x+1} = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

إذن $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = 0$

ومنه الدالة f قابلة للإشتقاق على اليسار في $x_0=-1$

و $f'_g(-1)=0$ والمنحنى (C_f) يقبل نصف مماس أفقي عند النقطة $A(-1,0)$.

ب- ليكن x عدداً من $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ لدينا

$$f'(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + (x+1)\times\frac{\frac{-2}{(x-1)^2}}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}$$

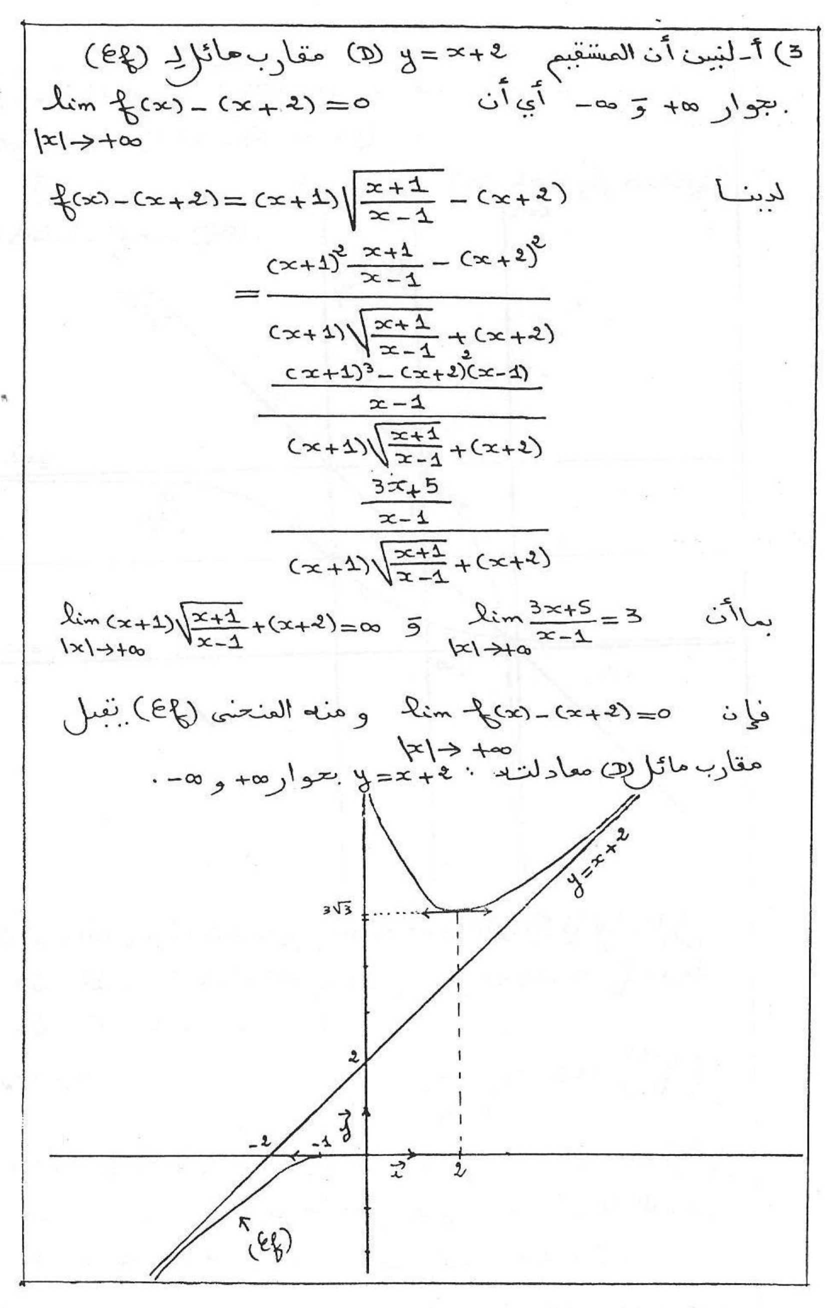
$$f'(x) = \frac{(x-1)(x+1)-(x+1)}{(x-1)^2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}} = \frac{(x+1)(x-1-1)}{(x-1)^2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}$$

ومنه

$$f'(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)^2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}$$

ج- إشارة $f'(x)$ هي إشارة $(x+1)(x-2)$.

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	//////	‖	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	//////	$+\infty$	↘	$3\sqrt{3}$	↗	$+\infty$



3) أ- لنبين أن المستقيم (D) $y=x+2$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$. أي أن $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)-(x+2)=0$

لدينا

$$f(x)-(x+2) = (x+1)\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - (x+2)$$

$$= \frac{(x+1)^2\frac{x+1}{x-1} - (x+2)^2}{(x+1)\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+(x+2)}$$

$$= \frac{\frac{(x+1)^3-(x+2)^2(x-1)}{x-1}}{(x+1)\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+(x+2)}$$

$$= \frac{\frac{3x+5}{x-1}}{(x+1)\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+(x+2)}$$

بما أن $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{3x+5}{x-1}=3$ و $\lim\limits_{|x|\to+\infty}(x+1)\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+(x+2)=\infty$

فإن $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)-(x+2)=0$ ومنه المنحنى (C_f) يقبل مقارب مائل (D) معادلته: $y=x+2$ بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

7

I - نعتبر الحدودية $P(x) = x^3 - 2x + 4$

1) حدد العددين a و b بحيث $P(x)=(x+2)(x^2+ax+b)$

2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x)=0$

II - نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي:

$$f(x)=\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}$$

ليكن (C_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) حدد حيز تعريف الدالة f : D_f .

2) احسب $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} f(x)$

3) أ- احسب $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{f(x)}{x}$ ، اعط تأويلا هندسيا لهذه النتيجة.

ب- احسب $f'(x)$ لكل x من $D_f - \{0\}$ وادرس إشارتها.

ج- اعط جدول تغيرات الدالة f .

4) أ- بين أن المنحنى (C_f) يقبل مقاربا مائلا بجوار $+\infty$.

ب- بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+x+1)=0$

5) أنشئ المنحنى (C_f) .

6) ليكن g قصور الدالة f على المجال $I=]-\infty,0]$.

أ- بين أن الدالة g تقبل دالة عكسية g^{-1} محددا حيز تعريفها.

ب- احسب $g^{-1}(\sqrt{2})$ و $(g^{-1})'(\sqrt{2})$

(يمكنك استعمال (I))

ج- انشئ المنحنى $(C_{g^{-1}})$ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

الجواب

I - لنحدد a و b بحيث $P(x)=(x+2)(x^2+ax+b)$

$\Leftrightarrow x^3-2x+4 = x^3+(a+2)x^2+(b+2a)x+2b$

$\Leftrightarrow a+2=0$ و $b+2a=-2$ و $2b=4$

$\Leftrightarrow a=-2$ و $b=2$

ومنه $P(x)=(x+2)(x^2-2x+2)$

2) لنحل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x)=0$ أي $(x+2)(x^2-2x+2)=0$

$\Leftrightarrow x+2=0$ أو $x^2-2x+2=0$

$\Leftrightarrow x=-2$ (المعادلة $x^2-2x+2=0$ ليس لها حل لأن $\Delta=-4<0$)

ومنه مجموعة حلول المعادلة $P(x)=0$ في $\mathbb{R}$: $S=\{-2\}$

II-1) لدينا $f(x)=\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}$

$x\in D_f \Leftrightarrow \left(x\in\mathbb{R}\right.$ و $x-2\neq0$ و $\left.\frac{x^3}{x-2}\geq0\right)$

x	$-\infty$ … 0	0 … 2	2 … $+\infty$
x^3	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	0 $+$
$\frac{x^3}{x-2}$	$+$	0 $-$	‖ $+$

ومنه $D_f=]-\infty,0]\cup]2,+\infty[$

2) بما أن $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{x^3}{x-2}=\lim\limits_{|x|\to+\infty}x^2=+\infty$ فإن $\lim\limits_{|x|\to+\infty}f(x)=+\infty$

و بما أن $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}}\frac{x^3}{x-2}=+\infty$ فإن $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}}f(x)=+\infty$

3) أ-

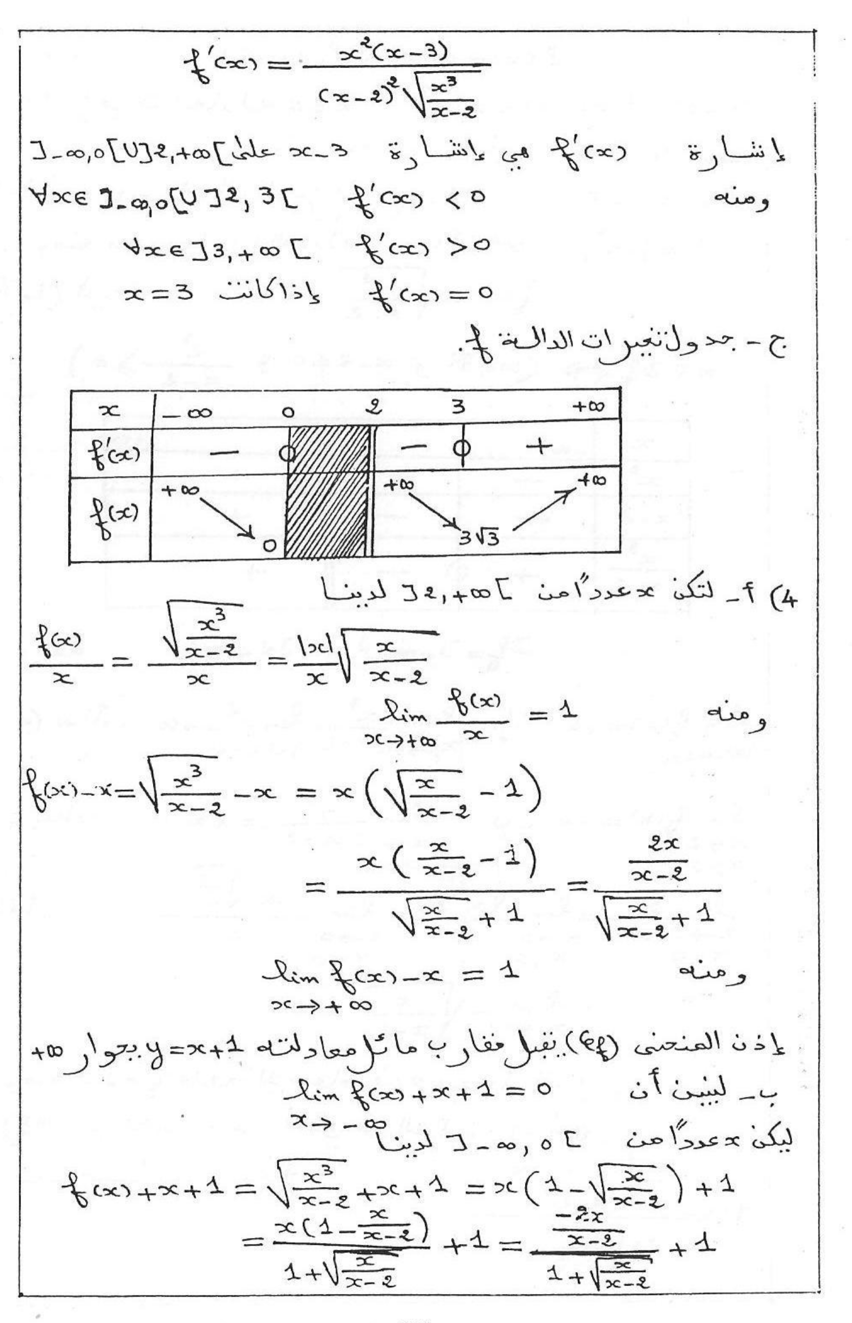
$$\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{f(x)}{x}=\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}}{x}=\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{|x|\sqrt{\frac{x}{x-2}}}{x}$$

$$=\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}-\sqrt{\frac{x}{x-2}}=0$$

ومنه الدالة f قابلة للإشتقاق في $x_0=0$ على اليسار والمنحنى (C_f) يقبل نصف مماس أفقي عند النقطة $O(0,0)$.

ب- حساب $f'(x)$

$$f'(x)=\frac{\frac{3x^2(x-2)-x^3}{(x-2)^2}}{2\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}}$$



$$f'(x) = \frac{x^2(x-3)}{(x-2)^2\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}}$$

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $x-3$ على $]-\infty,0[\cup]2,+\infty[$

ومنه $\forall x\in]-\infty,0[\cup]2,3[\quad f'(x)<0$

$\forall x\in]3,+\infty[\quad f'(x)>0$

$f'(x)=0$ إذا كانت $x=3$

ج- جدول تغيرات الدالة f.

x	$-\infty$		0	2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	‖ $+\infty$	↘	$3\sqrt{3}$	↗	$+\infty$

4) أ- لتكن x عدداً من $]2,+\infty[$ لدينا

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}}{x} = \frac{|x|}{x}\sqrt{\frac{x}{x-2}}$$

ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

$$f(x)-x = \sqrt{\frac{x^3}{x-2}} - x = x\left(\sqrt{\frac{x}{x-2}} - 1\right)$$

$$= \frac{x\left(\frac{x}{x-2}-1\right)}{\sqrt{\frac{x}{x-2}}+1} = \frac{\frac{2x}{x-2}}{\sqrt{\frac{x}{x-2}}+1}$$

ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x = 1$

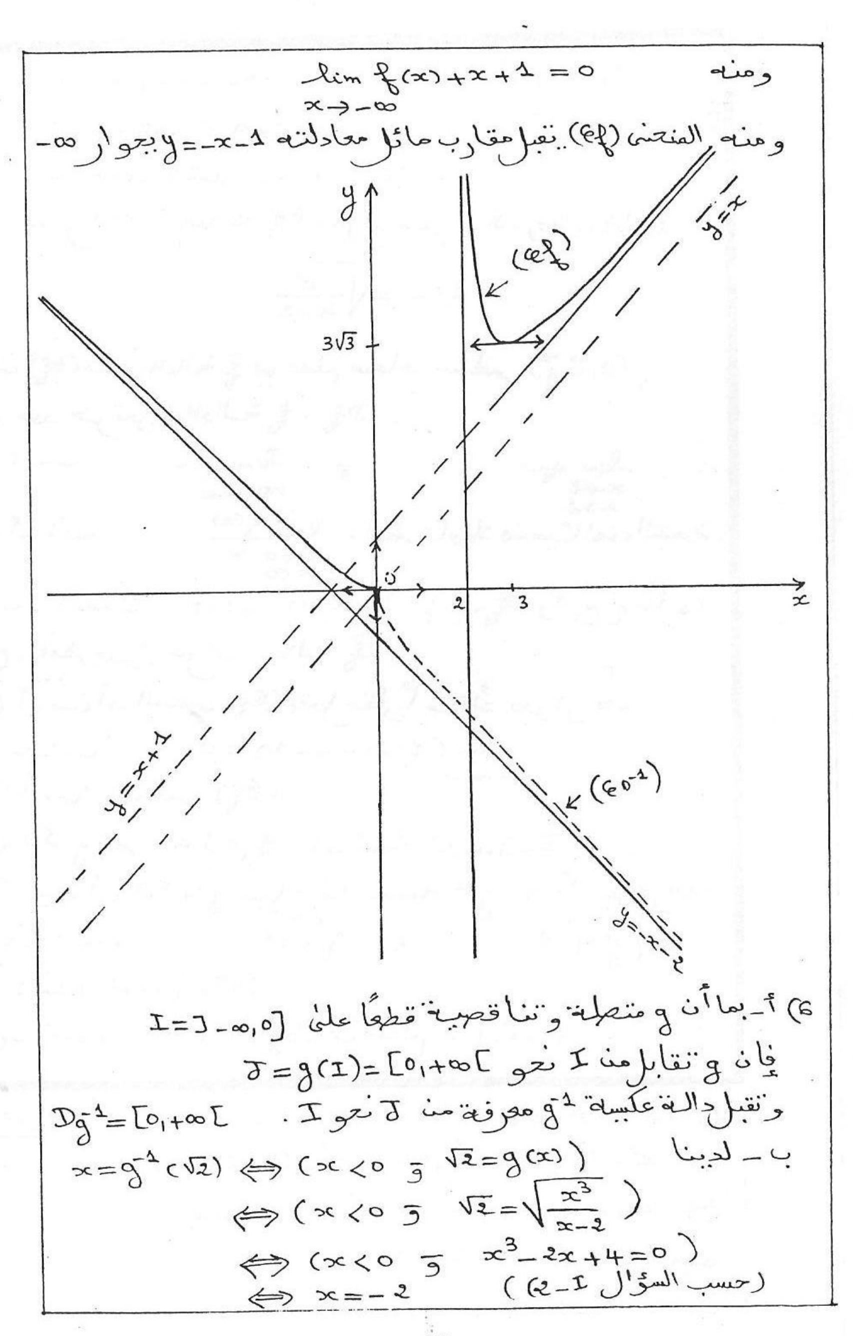
إذن المنحنى (C_f) يقبل مقارب مائل معادلته $y=x+1$ بجوار $+\infty$

ب- لنبين أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+x+1 = 0$

ليكن x عدداً من $]-\infty,0[$ لدينا

$$f(x)+x+1 = \sqrt{\frac{x^3}{x-2}} + x + 1 = x\left(1-\sqrt{\frac{x}{x-2}}\right) + 1$$

$$= \frac{x\left(1-\frac{x}{x-2}\right)}{1+\sqrt{\frac{x}{x-2}}} + 1 = \frac{\frac{-2x}{x-2}}{1+\sqrt{\frac{x}{x-2}}} + 1$$



ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+x+1 = 0$

ومنه المنحنى (C_f) يقبل مقارب مائل معادلته $y=-x-1$ بجوار $-\infty$

5) أ- بما أن g متصلة وتناقصية قطعاً على $I=]-\infty,0]$

فإن g تقابل من I نحو $J=g(I)=[0,+\infty[$

وتقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة من J نحو I. $D_{g^{-1}}=[0,+\infty[$

ب- لدينا $x=g^{-1}(\sqrt{2}) \Leftrightarrow (x<0$ و $\sqrt{2}=g(x))$

$\Leftrightarrow (x<0$ و $\sqrt{2}=\sqrt{\frac{x^3}{x-2}})$

$\Leftrightarrow (x<0$ و $x^3-2x+4=0)$ (حسب السؤال I-2)

$\Leftrightarrow x=-2$

ومنه $g^{-1}(\sqrt{2}) = -2$

لدينا $(g^{-1})'(\sqrt{2}) = \frac{1}{g'(g^{-1}(\sqrt{2}))}$ أي $(g^{-1})'(\sqrt{2}) = \frac{1}{g'(-2)}$

بما أن $g'(-2) = \frac{-5}{4\sqrt{20}}$ فإن $(g^{-1})'(\sqrt{2}) = -\frac{4\sqrt{20}}{5}$

ج - المنحنى $(C_{g^{-1}})$ مماثل المنحنى (C_g) بالنسبة للمستقيم $y=x$

8

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي :

$$f(x) = \frac{|x^2-1|}{\sqrt{x^2+|x|}}$$

1) حدد حيز تعريف الدالة f : D_f .

2) ادرس زوجية الدالة f.

3) اكتب $f(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة على $]0,+\infty[$

4) احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

5) بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته : $y = x+\frac{1}{2}$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

6) احسب $f'(x)$ في كل من الحالتين :

$0<x<1$ ؛ $x>1$.

7) ضع جدول تغيرات الدالة f على $]0,+\infty[$.

8) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f في $x_0 = 1$.

9) انشئ المنحنى (C_f) في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

10) نعتبر الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي :

$$g(x) = f(\sqrt{x})$$

أ- حدد حيز تعريف الدالة g : D_g .

ب- استنتج مما سبق جدول تغيرات الدالة g .

الجواب 1) لدينا $x\in D_f \Leftrightarrow (x\in\mathbb{R}$ و $x^2+|x|>0)$

$x\in D_f \Leftrightarrow (x\in\mathbb{R}$ و $x\neq 0)$

ومنه $D_f =]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

2) زوجية الدالة f .

لدينا $\forall x\in D_f \;:\; -x\in D_f$

$$f(-x) = \frac{|(-x)^2-1|}{\sqrt{(-x)^2+|-x|}} = \frac{|x^2-1|}{\sqrt{x^2+|x|}}$$

إذن $f(-x)=f(x)$ ومنه f دالة زوجية والمنحنى (C_f) متماثل بالنسبة لمحور الأراتيب .

3) لدينا

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1-x^2}{\sqrt{x^2+x}} & , \quad 0<x\leq 1 \\[2mm] f(x) = \dfrac{x^2-1}{\sqrt{x^2+x}} & ; \quad x>1 \end{cases}$$

4) لدينا

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1-x^2}{\sqrt{x^2+x}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(1-\frac{1}{x^2})}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x(1-\frac{1}{x^2})}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$$

ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

5) ليكن x عدداً من $]1,+\infty[$ لدينا

$$f(x)-(x-\tfrac{1}{2}) = \frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+x}} - x + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\dfrac{x^4-2x^2+1}{x^2+x} - x^2}{\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x^2+x}} + x} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\dfrac{-x^3-2x^2+1}{x^2+x}}{x\left(\dfrac{1-\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}+1\right)} + \frac{1}{2}$$

$$f(x)-\left(x-\frac{1}{2}\right)=\frac{-1-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1-\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}+1\right)}+\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-\left(x-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0$$

ومنه المنحنى (C_f) يقبل مقارب مائل معادلته $y=x-\frac{1}{2}$ بجوار $+\infty$

6) ليكن x من $]0,1[$ لدينا

$$f(x)=\frac{1-x^2}{\sqrt{x^2+x}}$$

$$f'(x)=\frac{-2x\sqrt{x^2+x}-(1-x^2)\times\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}}{\left(\sqrt{x^2+x}\right)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-4x^3-4x^2-2x-1+2x^3+x^2}{2\left(\sqrt{x^2+x}\right)^3}$$

$$f'(x)=\frac{-(2x^3+3x^2+2x+1)}{2\left(\sqrt{x^2+x}\right)^3}<0$$

ليكن x من $]1,+\infty[$ لدينا

$$f(x)=\frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+x}}$$

ومنه

$$f'(x)=\frac{2x^3+3x^2+2x+1}{2\left(\sqrt{x^2+x}\right)^3}>0$$

7) جدول تغيرات الدالة f على $]0,+\infty[$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

8) قابلية اشتقاق الدالة f في $x_0=1$

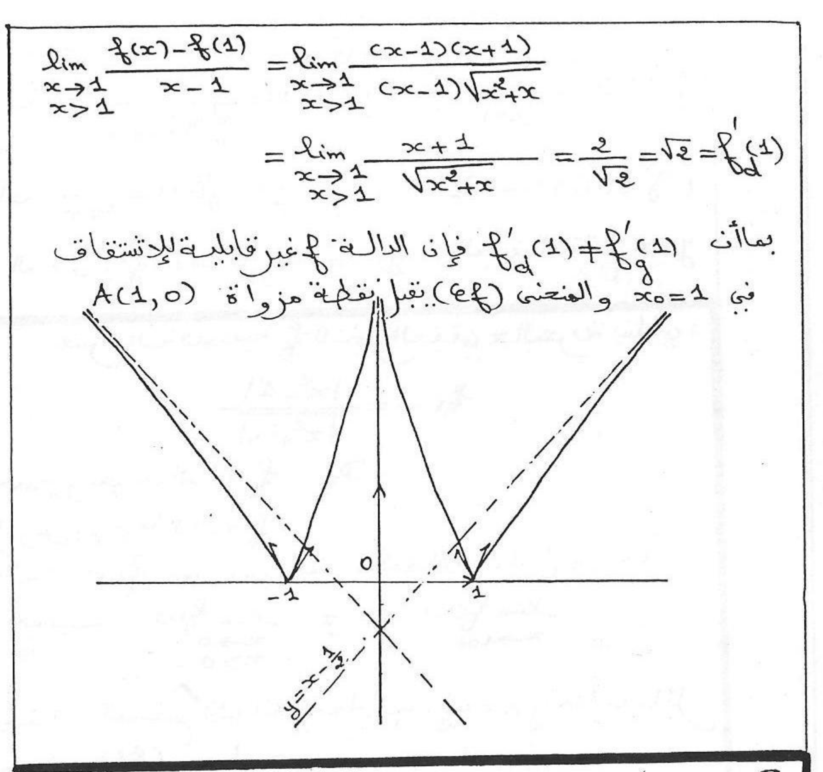
$$\lim_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{-(x-1)(x+1)}{(x-1)\sqrt{x^2+x}}$$

$$=\lim_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{-(x+1)}{\sqrt{x^2+x}}=-\frac{2}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}=f'_g(1)$$

$$\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)\sqrt{x^2+x}}$$

$$=\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}=f'_d(1)$$

بما أن $f'_d(1)\neq f'_g(1)$ فإن الدالة f غير قابلية للإشتقاق في $x_0=1$ والمنحنى (C_f) يقبل نقطة مزواة $A(1,0)$



9

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي:

$$f(x)=\frac{x^2+4}{x}-2\sqrt{\frac{x^2+4}{x}}$$

ليكن (C_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) حدد مجموعة التعريف D_f للدالة f .

2) احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)$

(لاحظ أن $X-2\sqrt{X}=\sqrt{X}(\sqrt{X}-2)$ لكل X من $\mathbb{R}^+$)

3) حدد الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

4) أ- بين أنه لكل x من D_f : $f'(x)=\frac{x^2-4}{x^2}\left(1-\sqrt{\frac{x}{x^2+4}}\right)$

ب- بين أنه لكل x من D_f ؛ $\sqrt{\frac{x}{x^2+4}}<1$

ج- اعط جدول تغيرات الدالة f .

5) بين أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلاً على الأقل في المجال $]\frac{1}{2},1[$
6) انشئ المنحنى $(\mathcal{C}_f)$.
7) ليكن g قصور الدالة f على المجال $I=]0,2]$.
أ- بين أن الدالة g تقابل من I نحو مجال J يتم تحديده.
ب- انشئ المنحنى $(\mathcal{C}_{g^{-1}})$ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$
(g^{-1} هو التقابل العكسي للتقابل g)

الجواب

1) تحديد D_f.

لدينا $x\in D_f \Leftrightarrow (x\in\mathbb{R}$ و $x\neq 0$ و $\frac{x^2+4}{x}\geq 0)$

$\Leftrightarrow (x\in\mathbb{R}$ و $x>0)$ (لأن $x^2+4>0$)

ومنه $D_f=]0,+\infty[$

2) حساب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

نضع $X=\frac{x^2+4}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{X\to+\infty}\sqrt{X}(\sqrt{X}-2)=+\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim_{X\to+\infty}\sqrt{X}(\sqrt{X}-2)=+\infty$$

3) الفرع اللانهائي للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+4}{x^2}-\frac{2}{x}\sqrt{\frac{x^2+4}{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}1+\frac{4}{x^2}-2\sqrt{\frac{x^2+4}{x^3}}=1+0-2\times0=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+4}{x}-x-2\sqrt{\frac{x^2+4}{x}}$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{4}{x}-2\sqrt{\frac{x^2+4}{x}}=-\infty$$

ومنه المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل المستقيم الذي معادلته: $y=x$ كاتجاه مقارب بجوار $+\infty$.

الدالة f قابلة للاشتقاق على D_f ولكل x من D_f لدينا:

$$f'(x)=\frac{2x^2-(x^2+4)}{x^2}-2\frac{\left(\frac{x^2+4}{x}\right)'}{2\sqrt{\frac{x^2+4}{x}}}$$

$$f'(x)=\frac{x^2-4}{x^2}-\frac{\frac{x^2-4}{x^2}}{\sqrt{\frac{x^2+4}{x}}}=\frac{x^2-4}{x^2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2+4}{x}}}\right)$$

ومنه $f'(x)=\frac{x^2-4}{x^2}\left(1-\sqrt{\frac{x}{x^2+4}}\right)$

ب- لنبين أنه لكل x من D_f: $\sqrt{\frac{x}{x^2+4}}<1$

ليكن x عدداً من D_f لدينا $\left(\sqrt{\frac{x}{x^2+4}}\right)^2-1=\frac{x}{x^2+4}-1$

$\left(\sqrt{\frac{x}{x^2+4}}\right)^2-1=\frac{-x^2+x-4}{x^2+4}<0$ (لأن $-x^2+x-4<0$ مميزها $\Delta=-3<0$ و $x^2+4>0$)

ومنه $\sqrt{\frac{x}{x^2+4}}<1$ لكل x من D_f.

ج- جدول تغيرات الدالة f.

لدينا $(\forall x\in D_f)\quad f'(x)=\frac{x^2-4}{x^2}\left(1-\sqrt{\frac{x}{x^2+4}}\right)$

بما أن $\left(1-\sqrt{\frac{x}{x^2+4}}\right)(x+2)>0$ فإن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $x-2$

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

5) لنبين أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلاً على الأقل في المجال $]\frac{1}{2},1[$.

نضع $h(x)=f(x)-x$ ، $x\in[\frac{1}{2},1]$

* الدالة h متصلة على المجال $[\frac{1}{2},1]$
* لدينا $h(1)=f(1)-1=5-2\sqrt{5}-1=4-2\sqrt{5}<0$

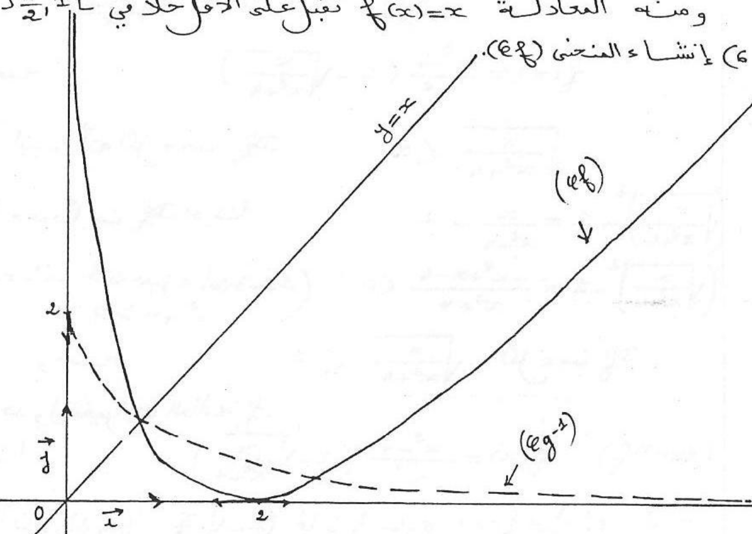
$h(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) - \frac{1}{2} = \frac{17}{2} - 2\sqrt{\frac{17}{2}} - \frac{1}{2} = 8 - 2\sqrt{\frac{17}{2}} > 0$

إذن $\quad h(\frac{1}{2})h(1) < 0$

حسب مبرهنة القيم الوسيطية يوجد على الأقل حلا للمعادلة $h(x)=0$ في المجال $]\frac{1}{2},1[$.

ومنه المعادلة $f(x)=x$ تقبل على الأقل حلاً في $]\frac{1}{2},1[$

6) إنشاء المنحنى (C_f).



7) أ- بما أن الدالة g متصلة وتناقصية قطعًا على $I=]0,2]$ فإن g تقابل من I نحو $J=g(I)=[0,+\infty[$ وتقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة من J نحو I .

ب- إنشاء المنحنى $(C_{g^{-1}})$.

المنحنى $(C_{g^{-1}})$ هو مماثل المنحنى (C_g) بالنسبة للمستقيم الذي معادلته : $y=x$. (انظر الشكل أعلاه) .

10 نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $]-\infty,-\frac{1}{2}]$ بما يلي : $f(x)=x+\sqrt{4x^2-1}$

ليكن (C_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) أ- بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

ب- بين أن المستقيم الذي معادلته : $y=-x$ مقارب مائل لـ (C_f)

2) أ- تحقق من أن لكل x من $]-\infty,-\frac{1}{2}[$:

$$\frac{f(x)-f(-\frac{1}{2})}{x+\frac{1}{2}} = 1-\sqrt{\frac{4x-2}{x+\frac{1}{2}}}$$

ب- ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليسار في $x_0=-\frac{1}{2}$.

ج- بين أنه لكل x من $]-\infty,-\frac{1}{2}[$:

$$f'(x)=\frac{-(1+12x^2)}{\sqrt{4x^2-1}\left(\sqrt{4x^2-1}-4x\right)}$$

د- اعط جدول تغيرات الدالة f.

3) حدد إحداثيتي نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع محور الأفاصيل ثم اكتب معادلة مماس المنحنى (C_f) في هذه النقطة .

4) إنشاء المنحنى (C_f) .

5) أ- بين أن الدالة f تقبل دالة عكسية f^{-1} وحدد حيز تعريفها.

ب- ليكن $(C_{f^{-1}})$ منحنى الدالة f^{-1} . اكتب معادلة مماس $(C_{f^{-1}})$ في النقطة ذات الأفصول $x_0=0$

ج- أنشئ المنحنى $(C_{f^{-1}})$ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

الجواب

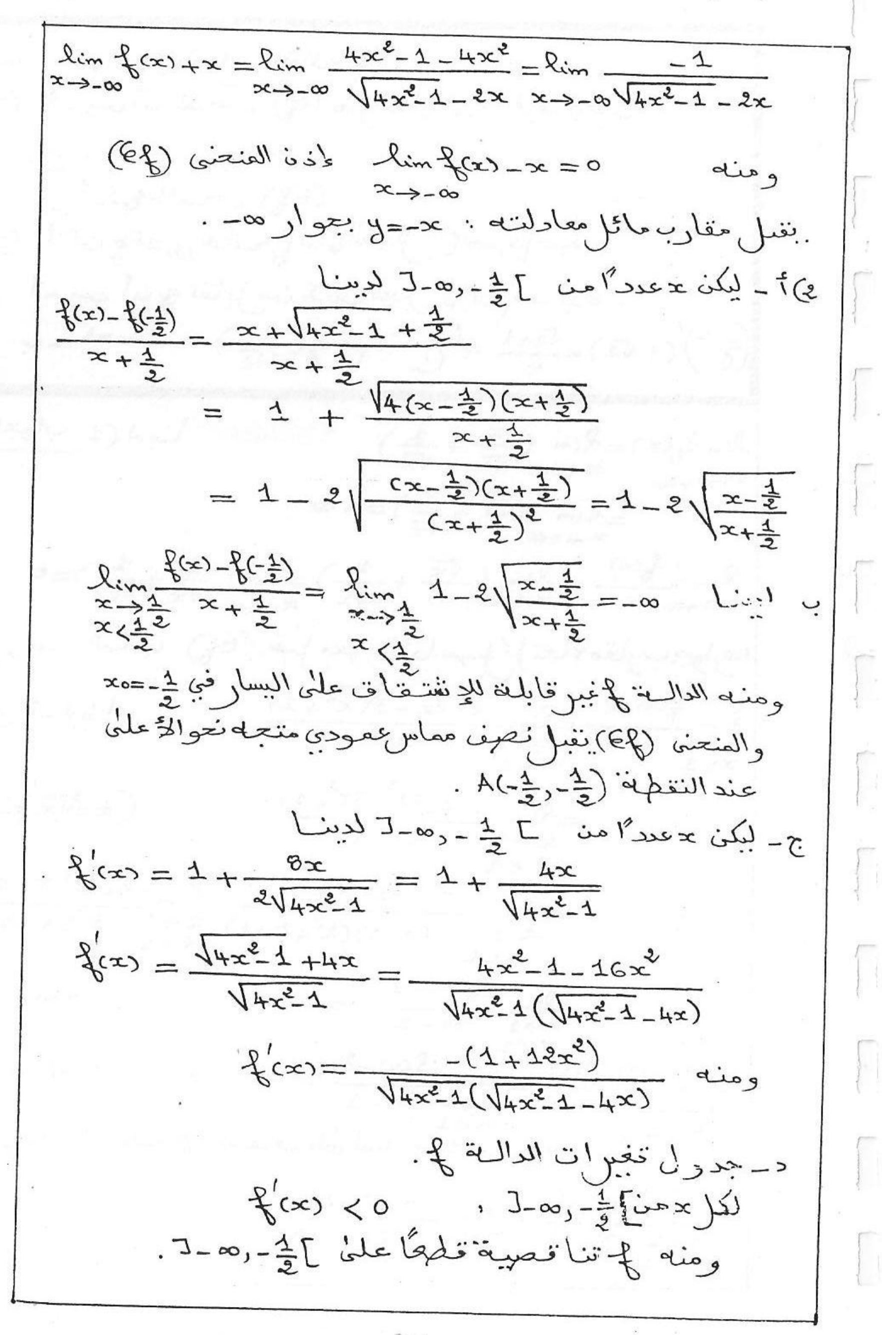
1) أ- لدينا

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x+|x|\sqrt{4-\frac{1}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty} x\left(1-\sqrt{4-\frac{1}{x^2}}\right)=+\infty$$

ب-

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)+x = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{4x^2-1}+2x$$



$$\lim_{x\to-\infty} f(x)+x = \lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2-1-4x^2}{\sqrt{4x^2-1}-2x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{\sqrt{4x^2-1}-2x}$$

ومنه $\lim_{x\to-\infty} f(x)-x=0$ إذن المنحنى (C_f) يقبل مقارب مائل معادلته : $y=-x$ بجوار $-\infty$.

2) أ- ليكن x عدداً من $]-\infty,-\frac{1}{2}[$ لدينا

$$\frac{f(x)-f(-\frac{1}{2})}{x+\frac{1}{2}} = \frac{x+\sqrt{4x^2-1}+\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}}$$

$$= 1 + \frac{\sqrt{4(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})}}{x+\frac{1}{2}}$$

$$= 1-2\sqrt{\frac{(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})}{(x+\frac{1}{2})^2}} = 1-2\sqrt{\frac{x-\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}}}$$

ب- لدينا $\lim_{\substack{x\to -\frac{1}{2} \\ x<-\frac{1}{2}}} \frac{f(x)-f(-\frac{1}{2})}{x+\frac{1}{2}} = \lim_{\substack{x\to -\frac{1}{2} \\ x<-\frac{1}{2}}} 1-2\sqrt{\frac{x-\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}}} = -\infty$

ومنه الدالة f غير قابلة للإشتقاق على اليسار في $x_0=-\frac{1}{2}$ والمنحنى (C_f) يقبل نصف مماس عمودي متجه نحو الأعلى عند النقطة $A(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$.

ج- ليكن x عدداً من $]-\infty,-\frac{1}{2}[$ لدينا

$$f'(x) = 1+\frac{8x}{2\sqrt{4x^2-1}} = 1+\frac{4x}{\sqrt{4x^2-1}}$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{4x^2-1}+4x}{\sqrt{4x^2-1}} = \frac{4x^2-1-16x^2}{\sqrt{4x^2-1}(\sqrt{4x^2-1}-4x)}$$

ومنه $f'(x) = \dfrac{-(1+12x^2)}{\sqrt{4x^2-1}(\sqrt{4x^2-1}-4x)}$

د- جدول تغيرات الدالة f.

لكل x من $]-\infty,-\frac{1}{2}[$ ، $f'(x)<0$

ومنه f تناقصية قطعاً على $]-\infty,-\frac{1}{2}[$.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$-\frac{1}{2}$

3) تقاطع المنحنى (C_f) مع محور الأفاصيل.

لنحل في $]-\infty,-\frac{1}{2}[$ المعادلة $f(x)=0$

$$\Leftrightarrow x+\sqrt{4x^2-1}=0 \Leftrightarrow \sqrt{4x^2-1}=-x$$

$$\Leftrightarrow 4x^2-1=x^2 \Leftrightarrow 3x^2-1=0$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

ومنه $(C_f)\cap(xx')=\{A(-\frac{\sqrt{3}}{3},0)\}$

معادلة مماس المنحنى (C_f) عند A هي :

(Δ) $y=f'(-\frac{\sqrt{3}}{3})(x+\frac{\sqrt{3}}{3})+f(-\frac{\sqrt{3}}{3})$

بما أن $f'(-\frac{\sqrt{3}}{3})=-3$ و $f(-\frac{\sqrt{3}}{3})=0$

فإن (Δ) $y=-3x-\sqrt{3}$

4) إنشاء المنحنى (C_f).

5) أ- بما أن الدالة f متصلة وتناقصية قطعًا على $]-\infty,-\frac{1}{2}]$

فإنها تقابل من $]-\infty,-\frac{1}{2}]$ نحو $J=f(]-\infty,-\frac{1}{2}])=[-\frac{1}{2},+\infty[$

وتقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة من $[-\frac{1}{2},+\infty[$ نحو $]-\infty,-\frac{1}{2}]$

ومنه $D_{f^{-1}}=[-\frac{1}{2},+\infty[$

ب- معادلة مماس $(C_{f^{-1}})$ عند النقطة ذات الأفصول $x_0=0$

هي $(\Delta')\quad y=(f^{-1})'(0)(x-0)+f^{-1}(0)$

لدينا $f(-\frac{\sqrt{3}}{3})=0$ إذن $f^{-1}(0)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

و $(f^{-1})'(0)=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(0))}=\dfrac{1}{f'(-\frac{\sqrt{3}}{3})}=-\dfrac{1}{3}$

ومنه $(\Delta')\quad y=-\frac{1}{3}x-\frac{\sqrt{3}}{3}$

ج- المنحنى $(C_{f^{-1}})$ هو مماثل (C_f) بالنسبة للمستقيم الذي معادلته: $y=x$ (أنظر الشكل أعلاه).

11

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=2(3\sqrt[3]{x^2}-2x) & , 0\leq x\leq 1 \\ f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x}} & , x>1 \end{cases}$$

ليكن (C_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$، ثم اعط تأويلاً هندسياً

2) أ- بين أن $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{f(x)-2}{x-1}=0$

ب- بين أن الدالة f قابلة للإشتقاق في $x_0=1$ وأن $f'(1)=0$

3) ادرس قابلية اشتقاق f على اليمين في $x_1=0$، ثم أول النتيجة هندسياً.

4) أ- تحقق من أن

$\forall x\in]0,1[\quad f'(x)=\dfrac{4(1-\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}}$

$\forall x\in]1,+\infty[\quad f'(x)=\dfrac{x-1}{2x\sqrt{x}}$

ب- اعط جدول تغيرات الدالة f.

5)- أ- بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطتي انعطاف يتعين تحديد زوج إحداثيتي كل منهما.

ب- أنشئ المنحنى (C_f).

6) ليكن g قصور الدالة f على المجال $I=[0,+\infty[$.

أ- بين أن g تقابل من I نحو مجال J يتم تحديده.

ب- احسب $g(\frac{1}{2\sqrt{2}})$ ثم استنتج أن $(g^{-1})'(3-\sqrt{2})=\frac{\sqrt{2}+1}{4}$

الجواب 1) لدينا

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x}}{x}+\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)=0$$

ومنه المنحنى (C_f) يقبل محور الأفاصيل كإتجاه مقارب بجوار $+\infty$

2) أ- لدينا

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{f(x)-2}{x-1}=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{-2(2x-3\sqrt[3]{x^2}+1)}{x-1}$$

(نضع $t=\sqrt[3]{x}$)

$$=\lim_{\substack{t\to 1\\ t<1}}\frac{-2(2t^3-3t^2+1)}{t^3-1}$$

$$=\lim_{\substack{t\to 1\\ t<1}}\frac{-2(t-1)(2t^2-t-1)}{(t-1)(t^2+t+1)}=\lim_{\substack{t\to 1\\ t<1}}\frac{-2(2t^2-t-1)}{t^2+t+1}$$

ومنه

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{f(x)-2}{x-1}=0$$

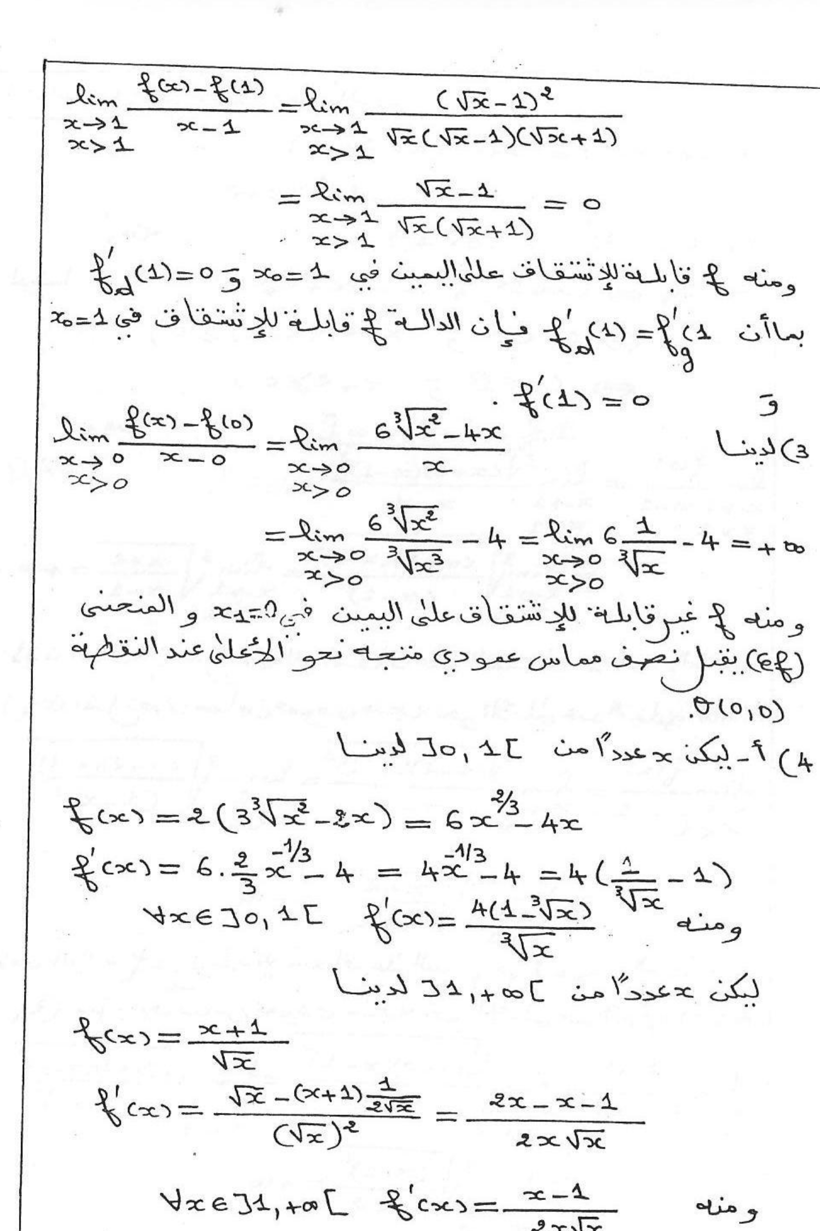
ب- لدينا

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{f(x)-2}{x-1}=0$$

ومنه f قابلية للإشتقاق على اليسار في $x_0=1$ و $f'_g(1)=0$

لدينا

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{x+1-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x-1)}$$



$$\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$=\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}=0$$

ومنه f قابلة للإشتقاق على اليمين في $x_0=1$ و $f'_d(1)=0$

بما أن $f'_g(1)=f'_d(1)$ فإن الدالة f قابلة للإشتقاق في $x_0=1$

و $f'(1)=0$.

3) لدينا

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{6\sqrt[3]{x^2}-4x}{x}$$

$$=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{6\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^3}}-4=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}6\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-4=+\infty$$

ومنه f غير قابلة للإشتقاق على اليمين في $x_1=0$ و المنحنى (C_f) يقبل نصف مماس عمودي متجه نحو الأعلى عند النقطة $O(0,0)$.

4) أ- ليكن x عدداً من $]0,1[$ لدينا

$$f(x)=2(3\sqrt[3]{x^2}-2x)=6x^{2/3}-4x$$

$$f'(x)=6.\frac{2}{3}x^{-1/3}-4=4x^{-1/3}-4=4\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-1\right)$$

ومنه $\forall x\in]0,1[\quad f'(x)=\frac{4(1-\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}}$

ليكن x عدداً من $]1,+\infty[$ لدينا

$$f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x}}$$

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x}-(x+1)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2}=\frac{2x-x-1}{2x\sqrt{x}}$$

ومنه $\forall x\in]1,+\infty[\quad f'(x)=\frac{x-1}{2x\sqrt{x}}$

ب- لكل x من $]0,1[\cup]1,+\infty[$ لدينا $f'(x)>0$

جدول تغيرات الدالة f .

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	2	↗	$+\infty$

5) أ- تحديد نقط إنعطاف المنحنى (C_f).

- بما أن الدالة f' تنعدم في $x_0=1$ بدون تغيير الإشارة فإن النقطة $A(1,2)$ نقطة إنعطاف المنحنى (C_f) .

- لكل x من $]0,1[$ لدينا $f'(x)=4x^{-1/3}-4$

$$f''(x)=-\frac{4}{3}x^{-4/3}=\frac{-4}{3\sqrt[3]{x^4}}=-\frac{4}{3x\sqrt[3]{x}}$$

لكل x من $]1,+\infty[$ لدينا ، $f'(x)=\frac{x-1}{2x^{3/2}}$

$$f''(x)=\frac{x^{3/2}-(x-1).\frac{3}{2}x^{1/2}}{2.x^3}=\frac{2x\sqrt{x}-3x\sqrt{x}+3\sqrt{x}}{4x^3}$$

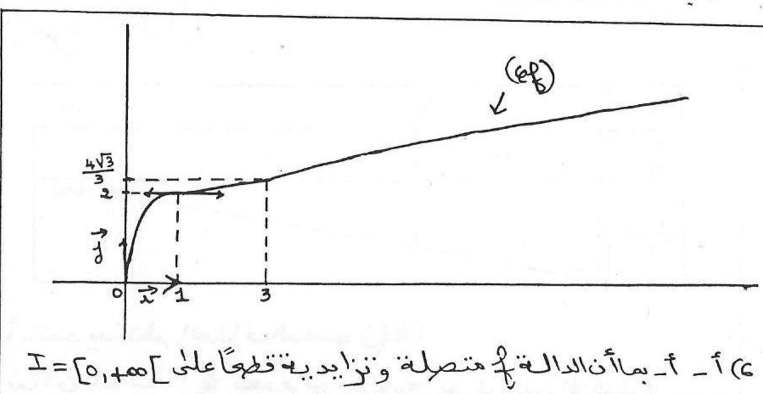
$$f''(x)=\frac{3\sqrt{x}-x\sqrt{x}}{3x^3}=\frac{\sqrt{x}(3-x)}{3x^3}$$

جدول إشارة $f''(x)$ وتقعر المنحنى (C_f)

x	0		1		3		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$-$	‖	$-$	0	$+$	
تقعر المنحنى (C_f)		∩		∩		∪	

وبما أن الدالة f'' تنعدم في $x_2=3$ مع تغيير الإشارة فإن النقطة $B\left(3,\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$ نقطة إنعطاف المنحنى (C_f)

ب- إنشاء المنحنى (C_f) .



6) أ ـ بما أن الدالة f متصلة وتزايدية قطعاً على $I=[0,+\infty[$
فإنها تقابل من I نحو $J=f(I)=[0,+\infty[$
وتقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة من J نحو I.

ب ـ لدينا
$$f\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)=2\left(3\sqrt[3]{\frac{1}{8}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$=2\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=3-\sqrt{2}$$

ولدينا
$$\left(f^{-1}\right)'(3-\sqrt{2})=\frac{1}{f'(f^{-1}(3-\sqrt{2}))}=\frac{1}{f'\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)}$$
$$\left(f^{-1}\right)'(3-\sqrt{2})=\frac{1}{f'(2^{-3/2})}=\frac{\sqrt[3]{2^{-3/2}}}{4\left(1-\sqrt[3]{2^{-3/2}}\right)}=\frac{2^{-1/2}}{4(1-2^{-1/2})}$$
$$\left(f^{-1}\right)'(3-\sqrt{2})=\frac{1}{4(\sqrt{2}-1)}=\frac{\sqrt{2}+1}{4}$$

12

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي :
$$f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x+2}$$
وليكن (C_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) تحقق من أن لكل x من $\mathbb{R}$: $x^3-3x+2=(x+2)(x-1)^2$ واستنتج حيز تعريف f.

2) احسب النهايات $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{f(x)}{x-1}$ ؛ $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{f(x)}{x-1}$ ؛ $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}}\frac{f(x)}{x+2}$
وأول النتائج المحصل عليها هندسياً.

3) ادرس تغيرات الدالة f.

4) بين أن المستقيم الذي معادلته $y=x$ مقارب مائل لـ (C_f) ثم أنشئ (C_f)

الجواب 1) ليكن x عدداً حقيقياً لدينا
$$(x+2)(x-1)^2=(x+2)(x^2-2x+1)$$
$$=x^3-2x^2+x+2x^2-4x+2$$
ومنه
$$(x+2)(x-2)^2=x^3-3x+2$$
لدينا
$$x\in D_f \Leftrightarrow (x\in\mathbb{R} \text{ و } x^3-3x+2\geqslant 0)$$
$$\Leftrightarrow (x\in\mathbb{R} \text{ و } (x+2)(x-1)^2\geqslant 0)$$
$$\Leftrightarrow (x\in\mathbb{R} \text{ و } x+2\geqslant 0)$$
ومنه
$$D_f=[-2,+\infty[$$

2) لدينا
$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{\sqrt[3]{(x+2)(x-1)^2}}{x-1}$$
$$=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\sqrt[3]{\frac{(x+2)(x-1)^2}{(x-1)^3}}=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\sqrt[3]{\frac{x+2}{x-1}}=+\infty$$

إذن الدالة f غير قابلة للإشتقاق على اليمين في $x_0=1$ والمنحنى (C_f) يقبل نصف مماس عمودي متجه نحو الأعلى عند النقطة $A(1,0)$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{\sqrt[3]{(x+2)(x-1)^2}}{x-1}=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}-\sqrt[3]{\frac{(x+2)(x-1)^2}{(1-x)^3}}$$
$$=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}-\sqrt[3]{\frac{x+2}{1-x}}=-\infty$$

إذن الدالة f غير قابلة للإشتقاق على اليسار في $x_0=1$ والمنحنى (C_f) يقبل نصف مماس عمودي متجه نحو الأعلى عند النقطة $A(1,0)$

$$\lim_{\substack{x\to -2\\ x>-2}}\frac{f(x)}{x+2}=\lim_{\substack{x\to -2\\ x>-2}}\frac{\sqrt[3]{(x+2)(x-1)^2}}{x+2}=\lim_{\substack{x\to -2\\ x>-2}}\sqrt{\frac{(x+2)(x-1)^2}{(x+2)^3}}$$
$$=\lim_{\substack{x\to -2\\ x>-2}}\sqrt[3]{\frac{(x-1)^2}{x+2}}=+\infty$$

إذن الدالة f غير قابلة للإشتقاق على اليمين في $x_1=-2$ والمنحنى (C_f) يقبل نصف مماس عمودي متجه نحو الأعلى عند النقطة $B(-2,0)$..

3) تغيرات الدالة f .

ليكن x عدداً من $]-2,1[\cup]1,+\infty[$ لدينا

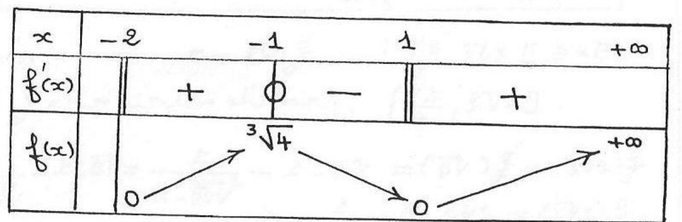
$$f(x)=(x^3-3x+2)^{1/3}$$

$$f'(x)=\frac{1}{3}(3x^2-3)(x^3-3x+2)^{-2/3}$$

ومنه

$$f'(x)=\frac{(x-1)(x+1)}{\sqrt[3]{(x^3-3x+2)^2}}$$

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $(x-1)(x+1)$.



x	-2		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	0	↗	$\sqrt[3]{4}$	↘	0	↗	$+\infty$

4) لنبين أن المستقيم الذي معادلته $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f)

لدينا

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-x=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3-3x+2}-x$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^3-3x+2)-x^3}{\left(\sqrt[3]{x^3-3x+2}\right)^2+x\sqrt[3]{x^3-3x+2}+x^2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(-3+\frac{2}{x}\right)}{x^2\left(\left(\sqrt[3]{1-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}}\right)^2+\sqrt[3]{1-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3+\frac{2}{x}}{x\left(\left(\sqrt[3]{1-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}}\right)^2+\sqrt[3]{1-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}}+1\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-x=0$$

ومنه المستقيم الذي معادلته $y=x$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$

13 نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي :

$$f(x)=x-1-\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}$$

1) بين أن $D_f=[0,1[\cup]1,+\infty[$ مجموعة تعريف الدالة f .

2) احسب نهايات الدالة f عند محدات D_f .

3) حدد الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f) للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

4) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على يمين $x_0=0$ ثم اعط تأويلا هندسياً للنتيجة المحصل عليها .

5) أ- بين أن لكل x من $]0,1[\cup]1,+\infty[$:

$$f'(x)=1+\frac{1}{3(x^{2/3}-x^{1/3})^2}$$

ب- اعط جدول تغيرات الدالة f .

6) بين أن $\exists \alpha\in]2\sqrt{2},\frac{27}{8}[\quad f(\alpha)=0$

7) ليكن g قصور الدالة f على المجال $]1,+\infty[$.

أ- بين أن g تقابل من $]1,+\infty[$ نحو مجال J يتم تحديده .

ب- بين أن $g^{-1}(6)=8$.

ج- بين أن الدالة g^{-1} قابلة للإشتقاق عند النقطة $y_0=6$.

د- احسب $(g^{-1})'(6)$.

8) انشئ المنحنيين (C_f) و $(C_{g^{-1}})$ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

الجواب

1) لدينا $x\in D_f \Leftrightarrow (x\in\mathbb{R}$ و $x\geq 0$ و $\sqrt[3]{x}-1\neq 0)$

$\Leftrightarrow (x\in\mathbb{R}$ و $x\geq 0$ و $x\neq 1)$

ومنه $D_f=[0,1[\cup]1,+\infty[$

2) حساب نهايات f عند محدات D_f .

لدينا

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x-1-\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}=+\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} x-1-\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}=-\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} x-1-\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x-1-\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1} = 0$$

3) تحديد الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f)

- بما أن $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = +\infty$ فإن المنحنى (C_f) يقبل مقارب عمودي معادلته : $x=1$.

- لدينا $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

بما أن $\lim_{x \to +\infty} f(x)-(x-1) = \lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1} = 0$

فإن المنحنى (C_f) يقبل مقارب مائل معادلته: $y=x-1$ بجوار $+\infty$

4) قابلية اشتقاق الدالة f على يمين $x_0=0$.

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{x-1-\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}}{x}$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} 1-\frac{\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-1}}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} 1-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}(\sqrt[3]{x}-1)}$$

إذن $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty$

ومنه f غير قابلة للإشتقاق على يمين $x_0=0$

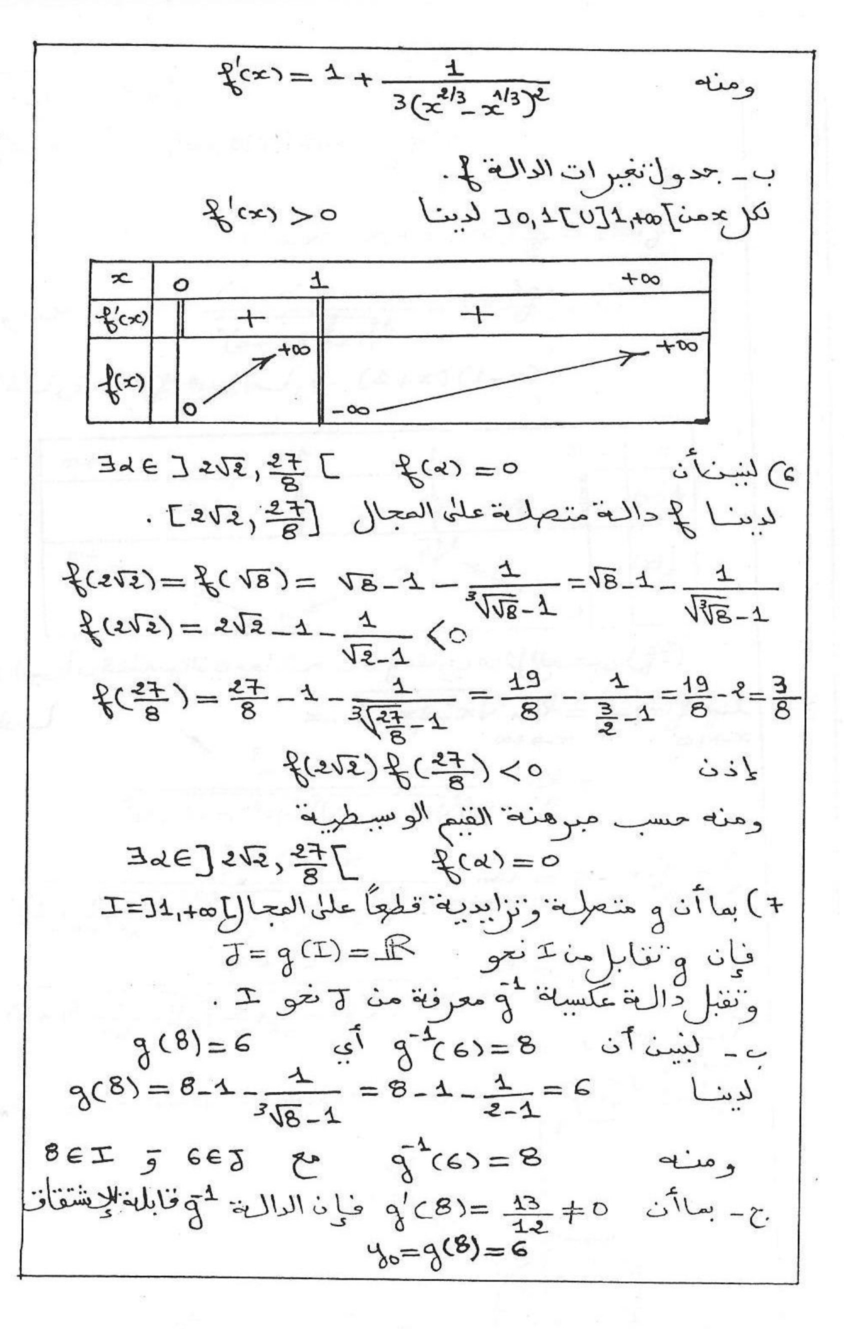
والمنحنى (C_f) يقبل نصف مماس عمودي متجهة نحو الأعلى عند النقطة $O(0,0)$.

5) أ- الدالة f قابلة للإشتقاق على $]0,1[\cup]1,+\infty[$

ولكل x من $]0,1[\cup]1,+\infty[$ لدينا $f(x)=x-1-\frac{1}{x^{1/3}-1}$

$$f'(x) = 1+\frac{\frac{1}{3}x^{-2/3}}{(x^{1/3}-1)^2} = 1+\frac{1}{3x^{2/3}(x^{1/3}-1)^2}$$

$$f'(x) = 1+\frac{1}{3(x^{1/3})^2(x^{1/3}-1)^2} = 1+\frac{1}{3(x^{1/3}(x^{1/3}-1))^2}$$



ومنه $f'(x) = 1+\frac{1}{3(x^{2/3}-x^{1/3})^2}$

ب- جدول تغيرات الدالة f.

لكل x من $]0,1[\cup]1,+\infty[$ لدينا $f'(x)>0$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

6) لنبين أن $\exists \alpha \in]2\sqrt{2}, \frac{27}{8}[\quad f(\alpha)=0$

لدينا f دالة متصلة على المجال $[2\sqrt{2}, \frac{27}{8}]$.

$$f(2\sqrt{2}) = f(\sqrt{8}) = \sqrt{8}-1-\frac{1}{\sqrt[3]{\sqrt{8}}-1} = \sqrt{8}-1-\frac{1}{\sqrt{\sqrt[3]{8}}-1}$$

$$f(2\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}-1-\frac{1}{\sqrt{2}-1} < 0$$

$$f\left(\frac{27}{8}\right) = \frac{27}{8}-1-\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{27}{8}}-1} = \frac{19}{8}-\frac{1}{\frac{3}{2}-1} = \frac{19}{8}-2 = \frac{3}{8}$$

إذن $f(2\sqrt{2})\, f\left(\frac{27}{8}\right) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم الوسيطية

$$\exists \alpha \in]2\sqrt{2}, \frac{27}{8}[\quad f(\alpha)=0$$

7) بما أن g متصلة وتزايدية قطعاً على المجال $I=]1,+\infty[$

فإن g تقابل من I نحو $J=g(I)=\mathbb{R}$

وتقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة من J نحو I.

ب- لنبين أن $g^{-1}(6)=8$ أي $g(8)=6$

لدينا $g(8) = 8-1-\frac{1}{\sqrt[3]{8}-1} = 8-1-\frac{1}{2-1} = 6$

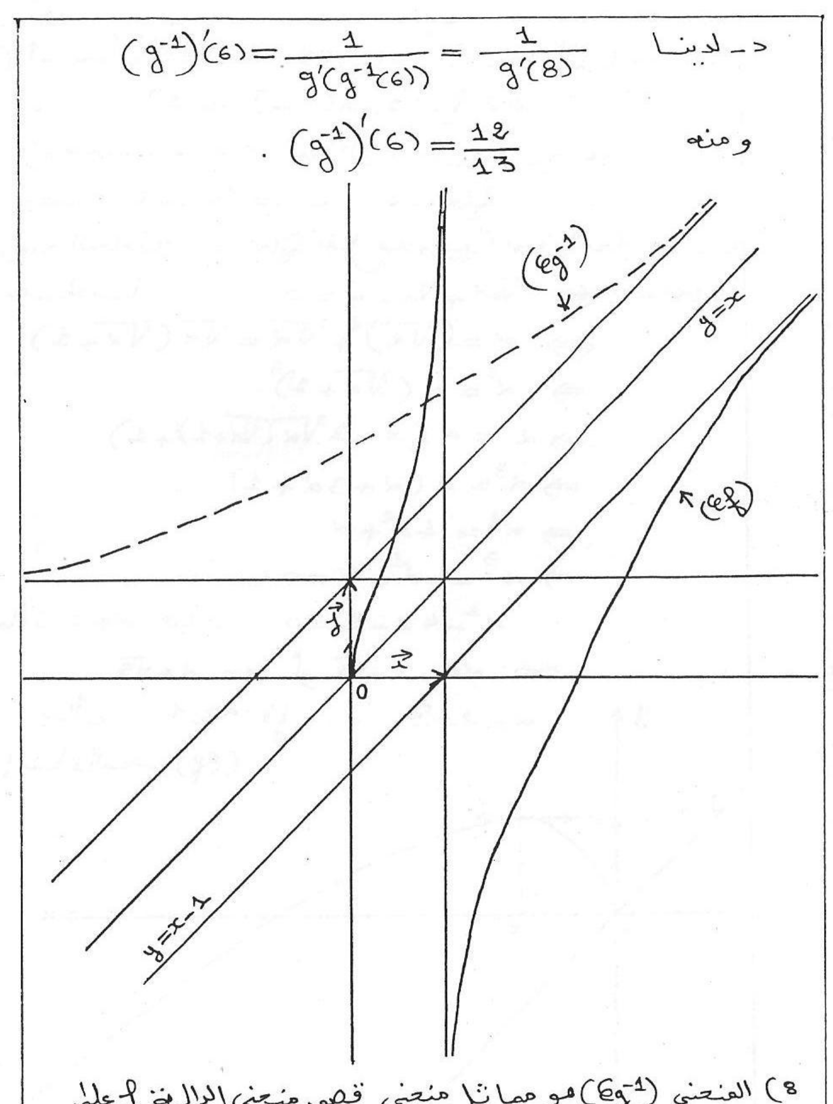
ومنه $g^{-1}(6)=8$ مع $6\in J$ و $8\in I$

ج- بما أن $g'(8)=\frac{13}{12}\neq 0$ فإن الدالة g^{-1} قابلة الإشتقاق

$y_0=g(8)=6$

د- لدينا $(g^{-1})'(6) = \frac{1}{g'(g^{-1}(6))} = \frac{1}{g'(8)}$

ومنه $(g^{-1})'(6) = \frac{12}{13}$.



8) المنحنى $(C_{g^{-1}})$ هو مماثل منحنى قصور منحنى الدالة f على المجال $]1,+\infty[$ بالنسبة للمستقيم الذي معادلته: $y=x$

14 نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بمايلي:

$$f(x)=\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}-x$$

وليكن (C_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) أ- تحقق من أن لكل x من $\mathbb{R}_+^*$ $f(x)=x\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-1\right)$

ب- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ وادرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f)

2) أ- ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في $x_0=0$ ثم اعط تأويلاً هندسياً للنتيجة المحصل عليها.

ب- بين أن لكل x من $\mathbb{R}_+^*$ $f'(x)=-\frac{(\sqrt[3]{x}-1)(3\sqrt[3]{x}+1)}{3\sqrt[3]{x^2}}$

ثم اعط جدول تغيرات الدالة f .

3) أ- بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α في $[1,+\infty[$

ب- بين أن α يحقق: $\alpha^3-4\alpha^2-\alpha=0$ ثم استنتج قيمة α

(تذكير: $(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)$)

4) انشئ المنحنى (C_f) (نأخذ $\alpha\simeq4,2$)

5) استنتج مما سبق أنه إذا كان a و b عددين حقيقيين بحيث $0<a<\alpha<b$ فإن $\frac{a^{2/3}+a^{1/3}}{b^{2/3}+b^{1/3}}>\frac{a}{b}$

الجواب 1) أ- ليكن x عدداً من $\mathbb{R}_+^*$ لدينا

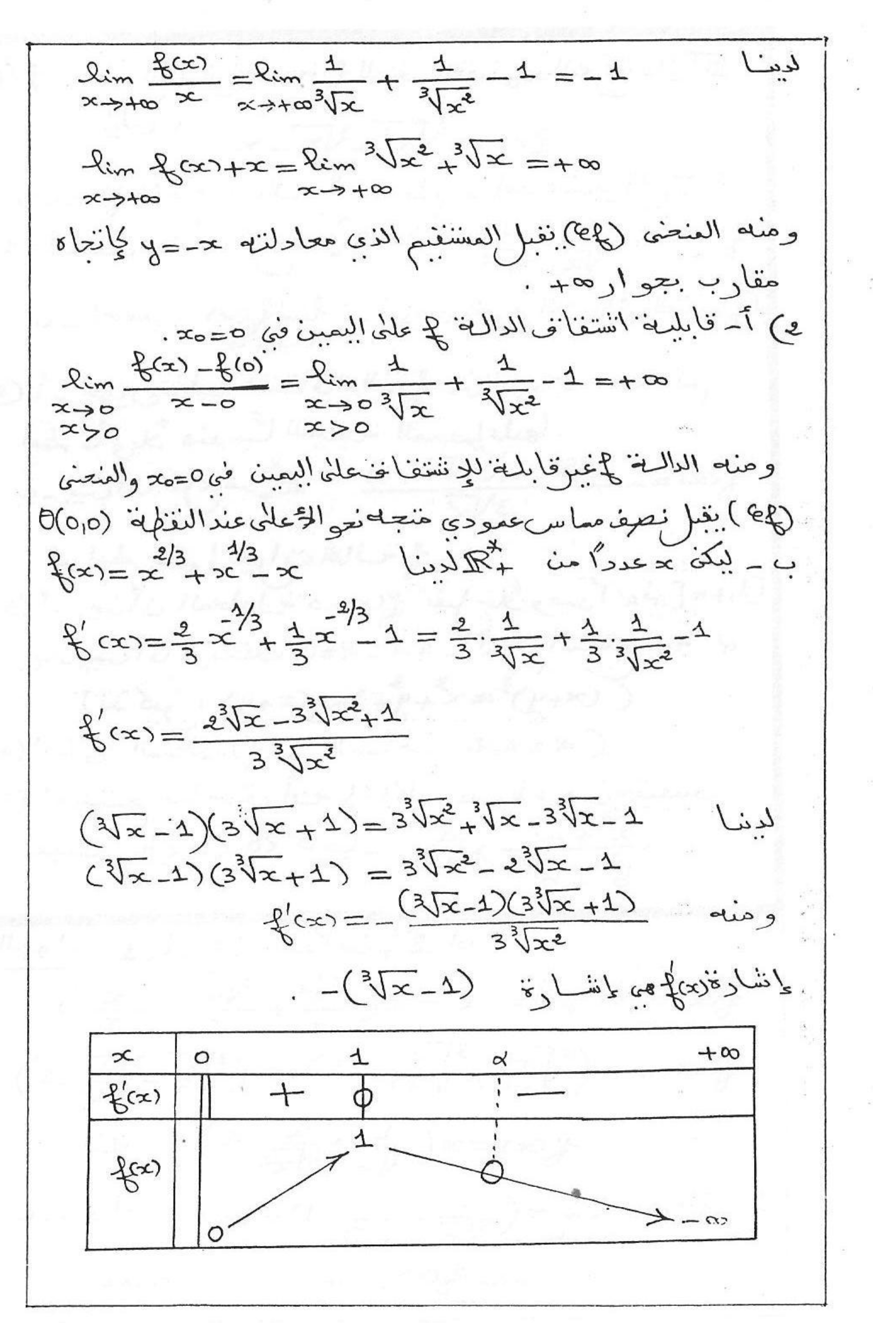
$$f(x)=\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}-x=x\left(\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}+\frac{\sqrt[3]{x}}{x}-\frac{x}{x}\right)$$

$$f(x)=x\left(\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^3}}+\sqrt[3]{\frac{x}{x^3}}-1\right)=x\left(\sqrt[3]{\frac{1}{x}}+\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}}-1\right)$$

ومنه $f(x)=x\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-1\right)$

ب- لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-1\right)=+\infty\times-1$

ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$



لدينا $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - 1 = -1$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)+x = \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x} = +\infty$

ومنه المنحنى (C_f) يقبل المستقيم الذي معادلته $y=-x$ كإتجاه مقارب بجوار $+\infty$.

2) أ- قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في $x_0=0$.

$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - 1 = +\infty$

ومنه الدالة f غير قابلة للإشتقاق على اليمين في $x_0=0$ والمنحنى (C_f) يقبل نصف مماس عمودي متجه نحو الأعلى عند النقطة $O(0,0)$

ب- ليكن x عدداً من $\mathbb{R}_+^*$ لدينا $f(x)=x^{2/3}+x^{1/3}-x$

$f'(x)=\frac{2}{3}x^{-1/3}+\frac{1}{3}x^{-2/3}-1 = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-1$

$f'(x)=\frac{2\sqrt[3]{x}-3\sqrt[3]{x^2}+1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

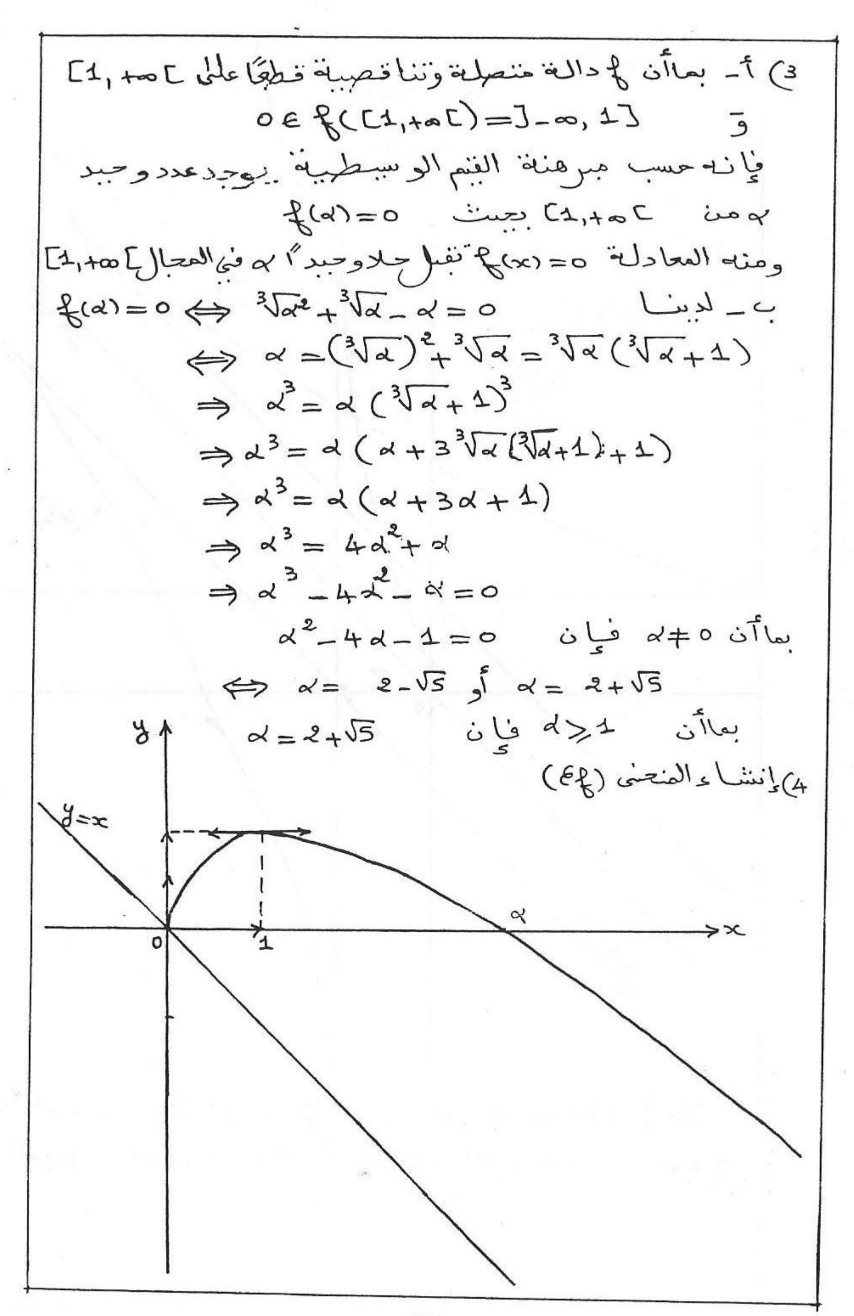
لدينا $(\sqrt[3]{x}-1)(3\sqrt[3]{x}+1)=3\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}-3\sqrt[3]{x}-1$

$(\sqrt[3]{x}-1)(3\sqrt[3]{x}+1)=3\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}-1$

ومنه $f'(x)=-\frac{(\sqrt[3]{x}-1)(3\sqrt[3]{x}+1)}{3\sqrt[3]{x^2}}$

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $-(\sqrt[3]{x}-1)$.

x	0		1		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0		$-$		
$f(x)$	0	↗	1	↘	0	↘	$-\infty$



3) أ- بما أن f دالة متصلة ومتناقصة قطعًا على $[1,+\infty[$

و $0\in f([1,+\infty[)=]-\infty,1]$

فإنه حسب مبرهنة القيم الوسيطية يوجد عدد وحيد α من $[1,+\infty[$ بحيث $f(\alpha)=0$

ومنه المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيداً α في المجال $[1,+\infty[$

ب- لدينا $f(\alpha)=0 \iff \sqrt[3]{\alpha^2}+\sqrt[3]{\alpha}-\alpha=0$

$\iff \alpha=(\sqrt[3]{\alpha})^2+\sqrt[3]{\alpha}=\sqrt[3]{\alpha}(\sqrt[3]{\alpha}+1)$

$\Rightarrow \alpha^3=\alpha(\sqrt[3]{\alpha}+1)^3$

$\Rightarrow \alpha^3=\alpha(\alpha+3\sqrt[3]{\alpha}(\sqrt[3]{\alpha}+1)+1)$

$\Rightarrow \alpha^3=\alpha(\alpha+3\alpha+1)$

$\Rightarrow \alpha^3=4\alpha^2+\alpha$

$\Rightarrow \alpha^3-4\alpha^2-\alpha=0$

بما أن $\alpha\neq0$ فإن $\alpha^2-4\alpha-1=0$

$\iff \alpha=2-\sqrt5$ أو $\alpha=2+\sqrt5$

بما أن $\alpha\geq1$ فإن $\alpha=2+\sqrt5$

4) إنشاء المنحنى (C_f)

3) لنبين أنه إذا كان $b>\alpha>a>0$ فإن $\dfrac{a^{2/3}+a^{1/3}}{b^{2/3}+b^{1/3}} > \dfrac{a}{b}$

بما أن $b>\alpha>a>0$ فإنه حسب جدول تغيرات الدالة f

نستنتج أن $f(a)>0$ و $f(b)<0$

أي $\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}-a>0$ و $\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{b}-b<0$

$\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}>a$ و $\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{b}<b$

$a<\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}$ و $\dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{b}}$

ومنه $\dfrac{a}{b}<\dfrac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{b}}$

أي $\dfrac{a^{2/3}+a^{1/3}}{b^{2/3}+b^{1/3}} > \dfrac{a}{b}$

15 نعتبر الدالة f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي:

$$f(x)=\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{10-x}$$

1) حدد D_f حيز تعريف الدالة f.

2) بين أن لكل x من $]0,10[$

$$f'(x)=\frac{\sqrt[4]{(10-x)^3}-\sqrt[4]{x^3}}{4\sqrt[4]{(x(10-x))^3}}$$

3) نضع $g(x)=\sqrt[4]{(10-x)^3}-\sqrt[4]{x^3}$ لكل x من $[0,10]$

ادرس إشارة $g(x)$ على $[0,10]$

4) اعط جدول تغيرات الدالة f.

5) استنتج مقارنة للعددين:

$A=\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{8}$ و $B=\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{7}$

الجواب تحديد D_f

لدينا

$x\in D_f \Leftrightarrow (x\in\mathbb{R}$ و $x\geq 0$ و $10-x\geq 0)$

$\Leftrightarrow (x\in\mathbb{R}$ و $x\geq 0$ و $x\leq 10)$

ومنه $D_f=[0,10]$

2) ليكن x عددا من $]0,10[$ لدينا

$$f(x)=x^{\frac{1}{4}}+(10-x)^{\frac{1}{4}}$$

$$f'(x)=\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}-\frac{1}{4}(10-x)^{-\frac{3}{4}}$$

$$f'(x)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}-\frac{1}{\sqrt[4]{(10-x)^3}}\right)$$

$$f'(x)=\frac{\sqrt[4]{(10-x)^3}-\sqrt[4]{x^3}}{4\cdot\sqrt[4]{x^3}\sqrt[4]{(10-x)^3}}$$

ومنه

$$f'(x)=\frac{\sqrt[4]{(10-x)^3}-\sqrt[4]{x^3}}{4\cdot\sqrt[4]{(x(10-x))^3}}$$

3) دراسة إشارة $g(x)$ على $[0,10]$

لدينا $g(x)=(10-x)^{\frac{3}{4}}-x^{\frac{3}{4}}$

$g(x)\geq 0 \Leftrightarrow (10-x)^{\frac{3}{4}}-x^{\frac{3}{4}}\geq 0$

$\Leftrightarrow (10-x)^{\frac{3}{4}}\geq x^{3/4}$

$\Leftrightarrow 10-x\geq x$

$\Leftrightarrow 5\geq x$

$g(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\in[0,5]$

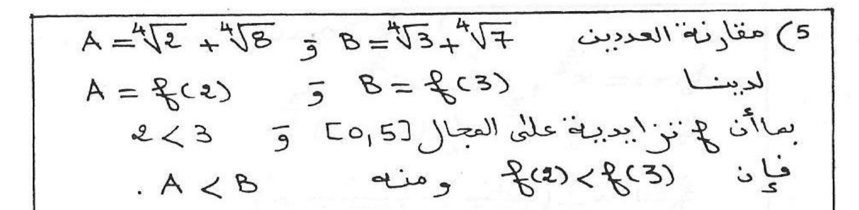
ومنه $g(x)\leq 0 \Leftrightarrow x\in[5,10]$

4) لكل x من $]0,10[$ لدينا $f'(x)=\dfrac{g(x)}{4\cdot\sqrt[4]{(x(10-x))^3}}$

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$.

جدول تغيرات الدالة f.

x	0		5		10
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\sqrt[4]{10}$	$\nearrow$	$2\sqrt[4]{5}$	$\searrow$	$\sqrt[4]{10}$



5) مقارنة العددين $B=\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{7}$ و $A=\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{8}$

لدينا $B=f(3)$ و $A=f(2)$

بما أن f تزايدية على المجال $[0,5]$ و $2<3$

فإن $f(2)<f(3)$ ومنه $A<B$.

16 I - نعتبر الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي :

$$g(x)=2x^3-5x^2-3$$

1) ادرس تغيرات الدالة g .

2) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α في $]\frac{5}{2},3[$

II - نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي :

$$f(x)=\frac{x}{x-1}(x^2+1)^{\frac{1}{3}}$$

وليكن (C_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) حدد نهايات الدالة f عند محدات حيز تعريفها : D_f .

2) أ- بين أن الدالة f قابلة للإشتقاق على كل من المجالين : $]-\infty,1[$ و $]1,+\infty[$

وأن لكل x من D_f : $f'(x)=\frac{g(x)}{3(x-1)^2\times(x^2+1)^{2/3}}$

ب- اعط جدول تغيرات الدالة f .

3) أ- ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f) .

ب- انشئ المنحنى (C_f) (نقبل أن $f(\alpha)\simeq3,2$ وأن لكل $x>1$: $f''(x)<0$)

4) لتكن h قصور الدالة f على المجال $I=]-\infty,1[$

أ- بين أن h تقبل دالة عكسية h^{-1} محدداً حيز تعريفها .

ب- بين أن الدالة h^{-1} قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$.

ج- أنشئ المنحنى $(C_{h^{-1}})$ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

الجواب

I-1) تغيرات الدالة g .

لدينا g دالة قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولكل x من $\mathbb{R}$ لدينا

$$g'(x)=6x^2-10x=2x(3x-5)$$

ومنه جدول تغيرات الدالة g .

x	$-\infty$		0		$5/3$		α		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$			
$g(x)$	$-\infty$	↗	-3	↘	$g(5/3)\simeq-7,6$	↗	0	↗	$+\infty$

2) لدينا g دالة متصلة وتزايدية قطعاً على المجال $[\frac{5}{2},3]$

ولدينا $g(3)=6$ و $g(\frac{5}{2})=-3$

إذن $g(\frac{5}{2})g(3)<0$

ومنه حسب مبرهنة القيم الوسيطية

$$\exists!\alpha\in]\frac{5}{2},3[\quad g(\alpha)=0$$

أي المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α في $]\frac{5}{2},3[$

II- 1) لنحدد نهايات الدالة f عند محدات D_f .

لدينا $D_f=]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$

- بما أن $\lim_{|x|\to+\infty}\frac{x}{x-1}=1$ و $\lim_{|x|\to+\infty}(1+x)^{1/3}=+\infty$

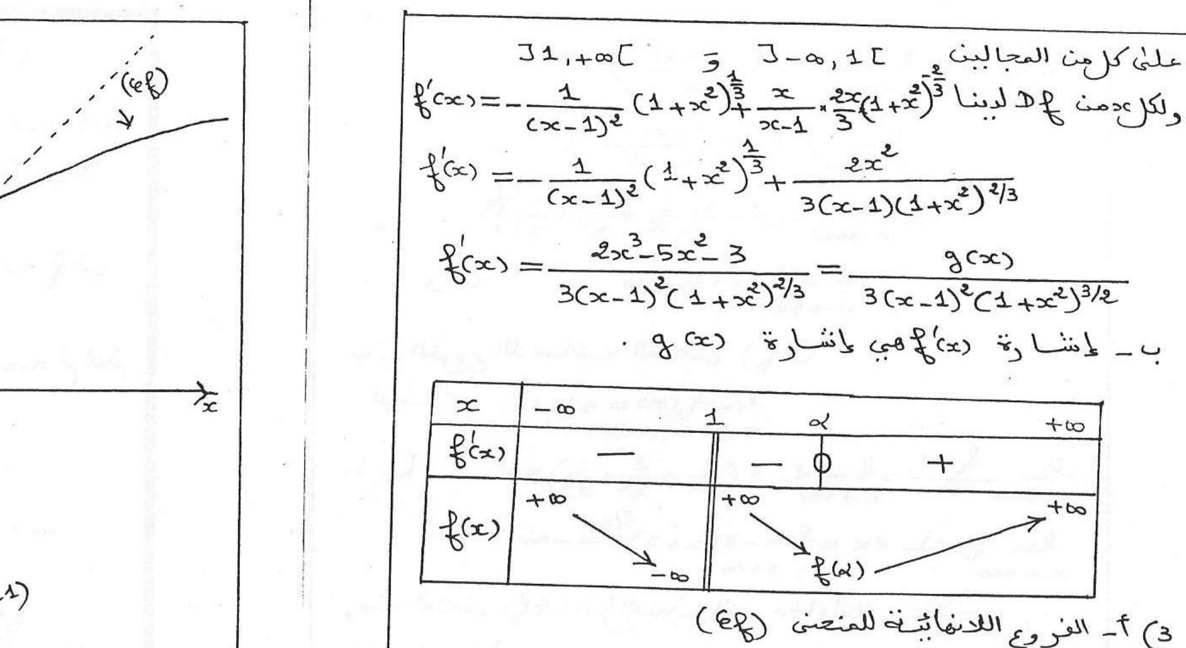
فإن $\lim_{|x|\to+\infty}f(x)=+\infty$

- $\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}f(x)=+\infty$ و $\lim_{\substack{x\to1\\x<1}}f(x)=-\infty$

2) أ- لدينا لكل x من D_f : $f(x)=\frac{x}{x-1}(x^2+1)^{\frac{1}{3}}$

نضع $u(x)=\frac{x}{x-1}$ و $v(x)=(x^2+1)^{\frac{1}{3}}$

بما أن الدالتين قابلتين للإشتقاق على كل من المجالين $]-\infty,1[$ و $]1,+\infty[$ فإن الدالة $f=u.v$ قابلة للإشتقاق



على كل من المجالين $]-\infty,1[$ و $]1,+\infty[$

ولكل x من D_f لدينا $f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}(1+x^2)^{\frac{1}{3}} + \frac{x}{x-1}\cdot\frac{2x}{3}(1+x^2)^{-\frac{2}{3}}$

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}(1+x^2)^{\frac{1}{3}} + \frac{2x^2}{3(x-1)(1+x^2)^{2/3}}$$

$$f'(x) = \frac{2x^3-5x^2-3}{3(x-1)^2(1+x^2)^{2/3}} = \frac{g(x)}{3(x-1)^2(1+x^2)^{3/2}}$$

ب- إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$.

x	$-\infty$ 1	1 α $+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$ 0 $+$
$f(x)$	$+\infty \searrow -\infty$	$+\infty \searrow f(\alpha) \nearrow +\infty$

3) أ- الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f)

- بما أن $\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = -\infty$ فإن المنحنى (C_f) يقبل مقارب عمودي معادلته: $x=1$

- لدينا $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

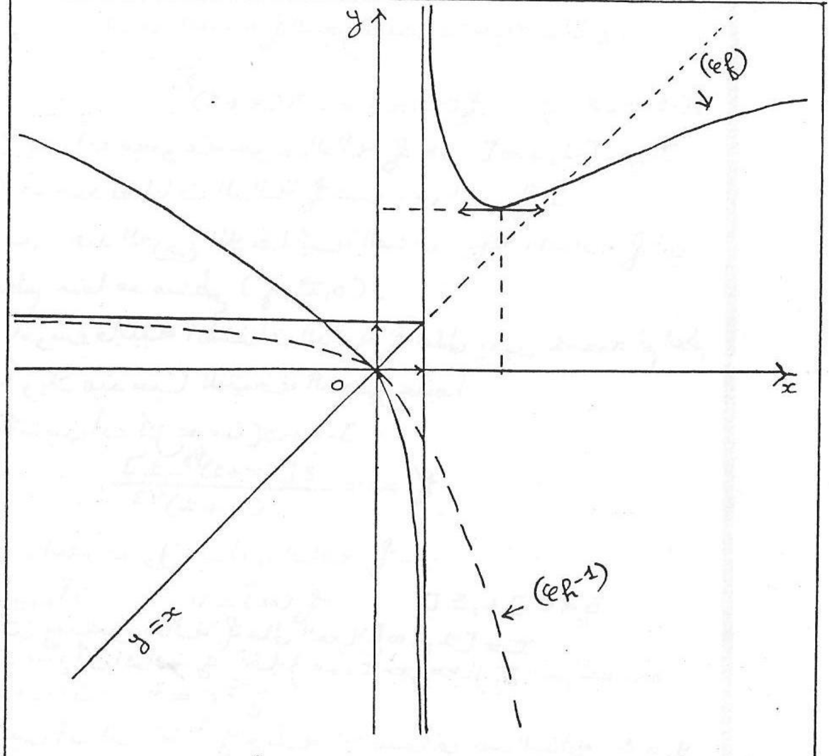
$$\lim_{|x|\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{|x|\to+\infty} \frac{\frac{x}{x-1}(x^2+1)^{\frac{1}{3}}}{x}$$

$$= \lim_{|x|\to+\infty} \frac{|x|\left(\frac{1}{|x|}+\frac{1}{|x|^3}\right)^{\frac{1}{3}}}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{\left(\frac{1}{|x|}+\frac{1}{|x|^3}\right)^{1/3}}{1-\frac{1}{x}} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+0} \frac{\left(\frac{1}{|x|}+\frac{1}{|x|^3}\right)^{\frac{1}{3}}}{1-\frac{1}{x}} = 0$$

ومنه المنحنى (C_f) يقبل محور الأفاصيل كإتجاه مقارب بجوار $+\infty$ و $-\infty$.



4) أ- بما أن h دالة متصلة وتناقصية قطعاً على المجال $]-\infty,1[$ فإنها تقابل من $]-\infty,1[$ نحو $J=h(]-\infty,1[)=\mathbb{R}$ وتقبل دالة عكسية h^{-1} معرفة من $\mathbb{R}$ نحو $]-\infty,1[$.

ب- بما أن h دالة قابلة للإشتقاق على $]-\infty,1[$ ولكل x من $]-\infty,1[$: $h'(x)<0$ إذن $h'(x)\neq 0$ فإن الدالة h^{-1} قابلة للإشتقاق على $h(]-\infty,1[)=\mathbb{R}$

ج- المنحنيين (C_h) و $(C_{h^{-1}})$ متماثلان بالنسبة للمستقيم (D) الذي معادلته: $y=x$.

17 نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي :

$f(x)=2x-3(x+1)^{2/3}$ و $f(-1)=-2$

1) بين أن مجموعة تعريف الدالة f هي $D_f=[-1,+\infty[$

2) أ- حدد نهايات الدالة f عند محدات D_f.

ب- حدد الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f) للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

4) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على يمين $x_0=-1$ ثم اعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها.

5) أ- بين أن لكل x من $]-1,+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{2[(x+1)^{1/3}-1]}{(x+1)^{1/3}}$$

ب- اعط جدول تغيرات الدالة f.

6) بين أن $f(\alpha)=0$ $\quad \exists\alpha\in]4,5[$

7) لتكن g قصور الدالة f على المجال $I=[1,+\infty[$

أ- بين أن الدالة g تقابل من I نحو مجال J يتم تحديده.

ب- بين أن $g^{-1}(2)=7$.

ج- بين أن الدالة g^{-1} قابلة للإشتقاق عند النقطة $y_0=2$.

احسب $(g^{-1})'(2)$.

8) انشئ المنحنى (C_f).

الجواب 1) لدينا $x\in D_f \Leftrightarrow (x\in\mathbb{R}$ و $x+1\geq 0)$

$\Leftrightarrow (x\in\mathbb{R}$ و $x\geq -1)$

ومنه $D_f=[-1,+\infty[$

2) تحديد نهايات الدالة f عند محدات D_f

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} 2x-3(x+1)^{2/3}=-2$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} 2x-3(x+1)^{2/3}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x\left(2-3\frac{(x+1)^{2/3}}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty} x\left(2-3\left(\frac{(x+1)^2}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty} x\left(2-3\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$$

ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

ب- الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f)

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} 2-3\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)=2$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-2x=\lim\limits_{x\to+\infty} -3(x+1)^{2/3}=-\infty$

ومنه المنحنى (C_f) يقبل المستقيم الذي معادلته $y=2x$ كإتجاه مقارب بجوار $+\infty$.

4) قابلية اشتقاق الدالة f على يمين $x_0=-1$.

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \frac{2x-3(x+1)^{2/3}+2}{x+1}$$

$$=\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} 2-3\frac{(x+1)^{2/3}}{x+1}$$

$$=\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} 2-\frac{3}{(x+1)^{1/3}}=-\infty$$

ومنه الدالة f غير قابلة للإشتقاق على يمين $x_0=-1$ والمنحنى (C_f) يقبل نصف مماس عمودي منحه نحو الأعلى عند النقطة $A(-1,-2)$.

5) أ- الدالة f قابلة للإشتقاق على $]-1,+\infty[$ ولكل x من $]-1,+\infty[$ لدينا

$f(x)=2x-3(x+1)^{2/3}$

$f'(x)=2-3\cdot\frac{2}{3}(x+1)^{-\frac{1}{3}}$

$$f'(x) = 2\left(1 - \frac{1}{(x+1)^{\frac{1}{3}}}\right)$$

ومنه
$$f'(x) = \frac{2\left[(x+1)^{\frac{1}{3}} - 1\right]}{(x+1)^{\frac{1}{3}}}$$

ب ـ جدول تغيرات الدالة f.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)^{\frac{1}{3}} - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x+1)^{\frac{1}{3}} = 1$$
$$\Leftrightarrow x+1 = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ -2	↘	-3	↗	$+\infty$

6) لدينا $f(5) = 10 - 3.6^{2/3} > 0$ و $f(4) = 8 - 3.5^{2/3} < 0$

بما أن الدالة f متصلة على $[4,5]$ و $f(4)f(5) < 0$

فإنه حسب مبرهنة القيم الوسيطية $\exists \alpha \in]4,5[\mid f(\alpha) = 0$

7) أ ـ بما أن g متصلة وتزايدية قطعًا على المجال $I = [0,+\infty[$

فإنها تقابل من I نحو $J = g(I) = [-3,+\infty[$

وتقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة من I نحو J.

ب ـ لدينا $g(7) = 14 - 3(8)^{2/3} = 14 - 12 = 2$

بما أن $2 \in I$ و $7 \in J$

فإن $g^{-1}(2) = 7$

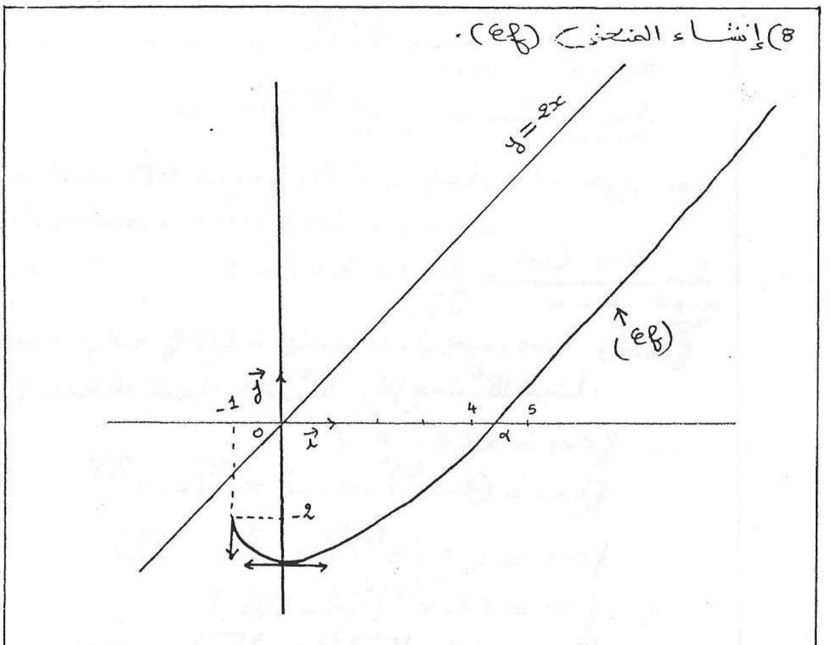
ج ـ بما أن $g'(7) = 1 \neq 0$ فإن الدالة g^{-1}

قابلة للإشتقاق في $y_0 = g(7) = 2$ ولدينا

$$(g^{-1})'(2) = \frac{1}{g'(g^{-1}(2))} = \frac{1}{g'(7)}$$

ومنه $(g^{-1})'(2) = 1$

8) إنشاء المنحنى (C_f).



18

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $[0,+\infty[$ بمايلي :
$$f(x) = x\left(2 - \sqrt[3]{x}\right)^3$$

وليكن (C_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) احسب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

2) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f في $x_0 = 0$ على اليمين.

3) بين أنه لكل x من $\mathbb{R}_+^*$ $f'(x) = 2\left(2 - \sqrt[3]{x}\right)^2\left(1 - \sqrt[3]{x}\right)$

4) ضع جدول تغيرات الدالة f.

5) انشىء المنحنى (C_f).

6) ليكن g قصور الدالة f على المجال $I = [8,+\infty[$

أ ـ بين أن g تقابل من I نحو مجال J ينتم تحديده.

ب ـ حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من J.

(g^{-1} هي الدالة العكسية للدالة g).

الجواب 1) لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x(2-\sqrt[3]{x})^3=-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}(2-\sqrt[3]{x})^3=-\infty$$

ومنه المنحنى (C_f) يقبل محور الأراتيب كاتجاه مقارب بجوار $+\infty$

2) قابلية اشتقاق الدالة f على يمين $x_0=0$

لدينا $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}(2-\sqrt[3]{x})^3=8$

ومنه الدالة f قابلة للإشتقاق على يمين $x_0=0$ و $f'(0)=8$

3) f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ ولكل x من $\mathbb{R}_+^*$ لدينا

$$f(x)=x(2-x^{1/3})^3$$

$$f'(x)=(2-x^{\frac{1}{3}})^3+x\times-\frac{3}{3}x^{-2/3}(2-x^{1/3})^2$$

$$f'(x)=(2-x^{1/3})^2(2-x^{1/3}-x^{1/3})$$

$$f'(x)=(2-x^{1/3})^2(2-2\sqrt[3]{x})$$

ومنه $f'(x)=2(2-\sqrt[3]{x})^2(1-\sqrt[3]{x})$

4) إشارة $f'(x)$ هي إشارة $1-\sqrt[3]{x}$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$0 \nearrow$	1	$\searrow -\infty$

5) إنشاء المنحنى (C_f).

6) أ- بما أن g متصلة وتناقصية قطعًا على المجال $I=[8,+\infty[$

فإن g تقابل من I نحو $J=g(I)=]-\infty,0]$

وتقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة من $]-\infty,0]$ نحو J.

ب- لدينا

$$\begin{cases} y=g^{-1}(x)\\ x\in J\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=g(y)\\ y\in I\end{cases}$$

$$x=g(y) \Leftrightarrow x=y(2-\sqrt[3]{y})^3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{y}(2-\sqrt[3]{y})$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt[3]{x}=(\sqrt[3]{y})^2-2\sqrt[3]{y}$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt[3]{x}+1=(\sqrt[3]{y})^2-2\sqrt[3]{y}+1$$

$$\Leftrightarrow 1-\sqrt[3]{x}=(\sqrt[3]{y}-1)^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1-\sqrt[3]{x}}=|\sqrt[3]{y}-1|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1-\sqrt[3]{x}}=\sqrt[3]{y}-1 \quad (\sqrt[3]{y}\geq 2)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1-\sqrt[3]{x}}+1=\sqrt[3]{y}$$

$$\Leftrightarrow y=(\sqrt{1-\sqrt[3]{x}}+1)^3$$

ومنه $g^{-1}(x)=(\sqrt{1-\sqrt[3]{x}}+1)^3$

19 نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $[-1,+\infty[$ بمايلي: $f(x)=\sqrt[3]{x^3+1}$

ليكن (C_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) بين أن المستقيم (D) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$ (يمكنك استعمال $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$)

3) أ- احسب $f'(x)$ لكل x من $]-1,+\infty[$ واستنتج أن f تزايدية على $]-1,+\infty[$.

ب- بين أن المنحنى (C_f) يقبل في $M_0(-1,0)$ نصف مماس موازٍ بالمحور الأراتيب

4) أ ـ لتكن f'' الدالة المشتقة الثانية للدالة f .

بيّن أن لكل x من $]-1,+\infty[$: $f''(x) = 2x(x^3+1)^{-\frac{5}{3}}$

ب ـ حدد معللاً جوابك نقطة انعطاف المنحنى (C_f) .

5) ضع جدول تغيرات الدالة f

6) أنشئ المنحنى (C_f) . نأخذ $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1cm$

7) لتكن g الدالة العددية المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي: $g(x)=f(x)$.

أ ـ بيّن أن g تقابل من $\mathbb{R}^+$ نحو مجال J يتم تحديده.

ب ـ حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من J .

ج ـ انشئ المنحنى $(C_{g^{-1}})$ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

الجواب 1) بما أن $\lim_{x\to+\infty} x^3+1=+\infty$ فإن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

2) ليكن x عدداً من $\mathbb{R}^+$ لدينا

$$f(x)-x=\sqrt[3]{x^3+1}-x$$

$$=\frac{x^3+1-x^3}{(\sqrt[3]{x^3+1})^2+x\sqrt[3]{x^3+1}+x^2}=\frac{1}{(\sqrt[3]{x^3+1})^2+x\sqrt[3]{x^3+1}+x^2}$$

ومنه $\lim_{x\to+\infty} f(x)-x=0$

إذن (C_f) يقبل مقارب مائل معادلته $y=x$ (D) بجوار $+\infty$

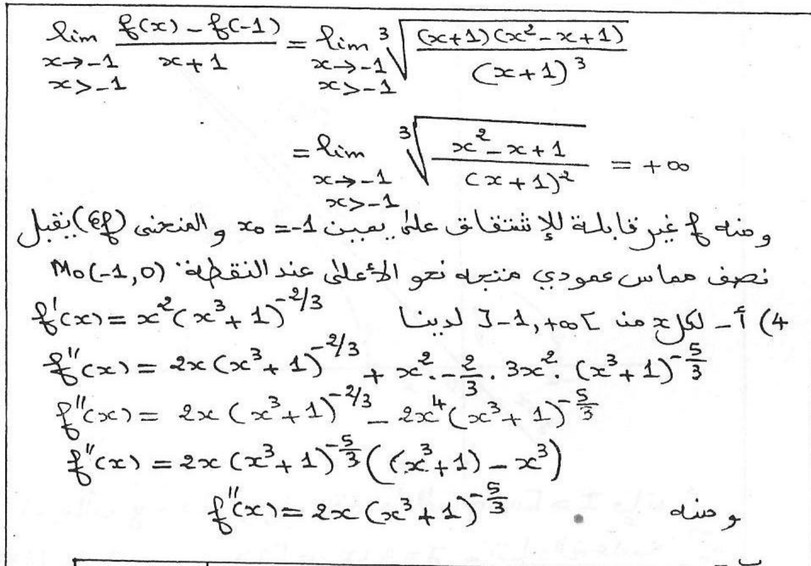
3) أ ـ لكل x من $]-1,+\infty[$ لدينا $f(x)=(x^3+1)^{\frac{1}{3}}$

$$f'(x)=\frac{1}{3}\cdot 3x^2(x^3+1)^{-\frac{2}{3}}$$

$$f'(x)=\frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2}}$$

بما أن لكل x من $]-1,+\infty[$: $f'(x)>0$ فإن f تزايدية على $]-1,+\infty[$

ب ـ لدينا $\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}}\frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x+1}$



$$\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}}\sqrt[3]{\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)^3}}$$

$$=\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}}\sqrt[3]{\frac{x^2-x+1}{(x+1)^2}}=+\infty$$

ومنه f غير قابلة للإشتقاق على يمين $-1=x$ و المنحنى (C_f) يقبل نصف مماس عمودي منتجه نحو الأعلى عند النقطة: $M_0(-1,0)$

4) أ ـ لكل x من $]-1,+\infty[$ لدينا $f'(x)=x^2(x^3+1)^{-2/3}$

$$f''(x)=2x(x^3+1)^{-2/3}+x^2\cdot-\frac{2}{3}\cdot 3x^2\cdot(x^3+1)^{-\frac{5}{3}}$$

$$f''(x)=2x(x^3+1)^{-2/3}-2x^4(x^3+1)^{-\frac{5}{3}}$$

$$f''(x)=2x(x^3+1)^{-\frac{5}{3}}\left((x^3+1)-x^3\right)$$

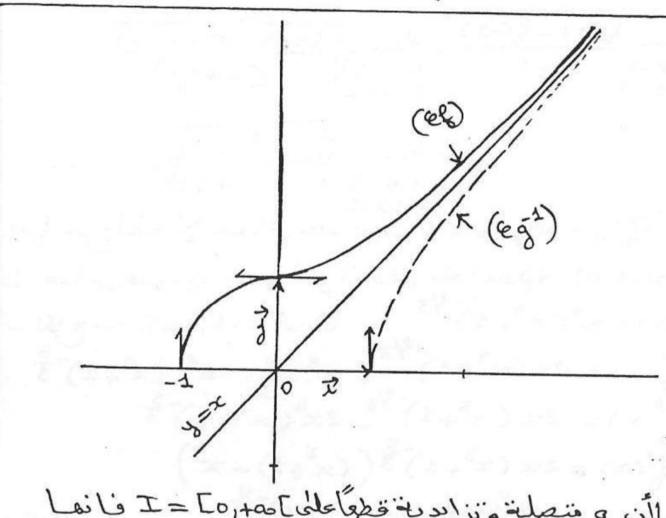
و منه $f''(x)=2x(x^3+1)^{-\frac{5}{3}}$

ب ـ

x	-1		0		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	
تقعر المنحنى (C_f)		∩	$A(0,1)$ نقطة انعطاف (C_f)	∪	

5) جدول تغيرات الدالة f .

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	1	↗	$+\infty$



7) أ- بما أن g متصلة وتزايدية قطعا على $I=[0,+\infty[$ فإنها تقابل من I نحو $J=g(I)=[1,+\infty[$ وتقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة من J نحو I.

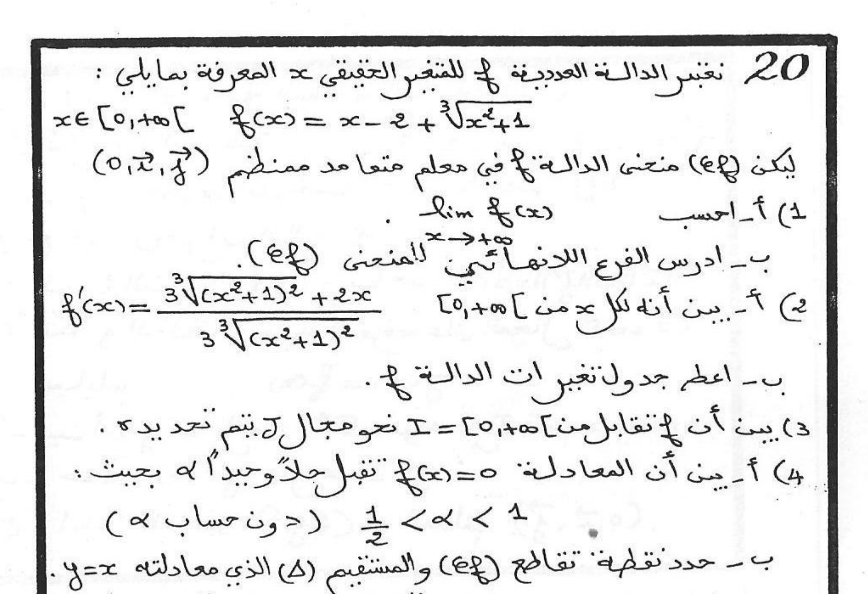
ب- لدينا

$$\begin{cases} y=g^{-1}(x) \\ x\in J \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=g(y) \\ y\in I \end{cases}$$

$$x=g(y) \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{y^3+1}$$
$$\Leftrightarrow x^3=y^3+1 \Leftrightarrow y^3=x^3-1$$
$$\Leftrightarrow y=\sqrt[3]{x^3-1}$$

ومنه $\forall x\in[1,+\infty[\quad g^{-1}(x)=\sqrt[3]{x^3-1}$

ج- المنحنى $(C_{g^{-1}})$ هو مماثل المنحنى (C_g) بالنسبة للمستقيم الذي معادلته : $y=x$ (انظر الشكل أعلاه)



20 نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي :

$x\in[0,+\infty[\quad f(x)=x-2+\sqrt[3]{x^2+1}$

ليكن (C_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) أ- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب- ادرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f).

2) أ- بين أنه لكل x من $[0,+\infty[$ $\quad f'(x)=\dfrac{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}+2x}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}$

ب- اعط جدول تغيرات الدالة f.

3) بين أن f تقابل من $I=[0,+\infty[$ نحو مجال J يتم تحديده.

4) أ- بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث :
$\frac{1}{2}<\alpha<1$ (دون حساب α)

ب- حدد نقطة تقاطع (C_f) والمستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$.

ج- انشئ المنحنيين (C_f) و $(C_{f^{-1}})$ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

الجواب

1) أ- حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^2+1}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} x-2=+\infty$

فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

ب- لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\dfrac{2}{x}+\sqrt[3]{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}}=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x=\lim\limits_{x\to+\infty} -2+\sqrt[3]{x^2+1}=+\infty$

ومنه المنحنى (C_f) يقبل المستقيم الذي معادلته: $y=x$ كإتجاه مقارب بجوار $+\infty$

2) أ- الدالة f قابلة للإشتقاق على $[0,+\infty[$ ولكل x من $[0,+\infty[$

لدينا $f'(x)=1+\frac{1}{3}.2x(x^2+1)^{-2/3}$

$$f'(x)=1+\frac{2x}{3(x^2+1)^{2/3}}=\frac{3(x^2+1)^{2/3}+2x}{3(x^2+1)^{2/3}}$$

ومنه
$$f'(x)=\frac{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}+2x}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}$$

ب- لكل x من $[0,+\infty[$ لدينا $f'(x)>0$.

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	-1 $\nearrow$ $+\infty$

3) بما أن f متصلة وتزايدية قطعاً على I فإنها تقابل من I نحو $J=f(I)=[-1,+\infty[$ وتقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة من J نحو I .

4) أ- لدينا
$$f(\tfrac{1}{2})=-\tfrac{3}{2}+\sqrt[3]{\tfrac{5}{4}}<0$$
$$f(1)=-1+\sqrt[3]{2}>0$$

إذن
$$f(\tfrac{1}{2})f(1)<0$$

ولدينا الدالة f متصلة على المجال $[\frac{1}{2},1]$

فحسب مبرهنة القيم الوسيطية يوجد عدد وحيد α من $]\frac{1}{2},1[$

بحيث $f(\alpha)=0$ أي المعادلة $f(x)=0$

تقبل حلاً وحيداً α بحيث $\frac{1}{2}<\alpha<1$.

ب- تحديد نقطة تقاطع المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ والمستقيم (Δ) .

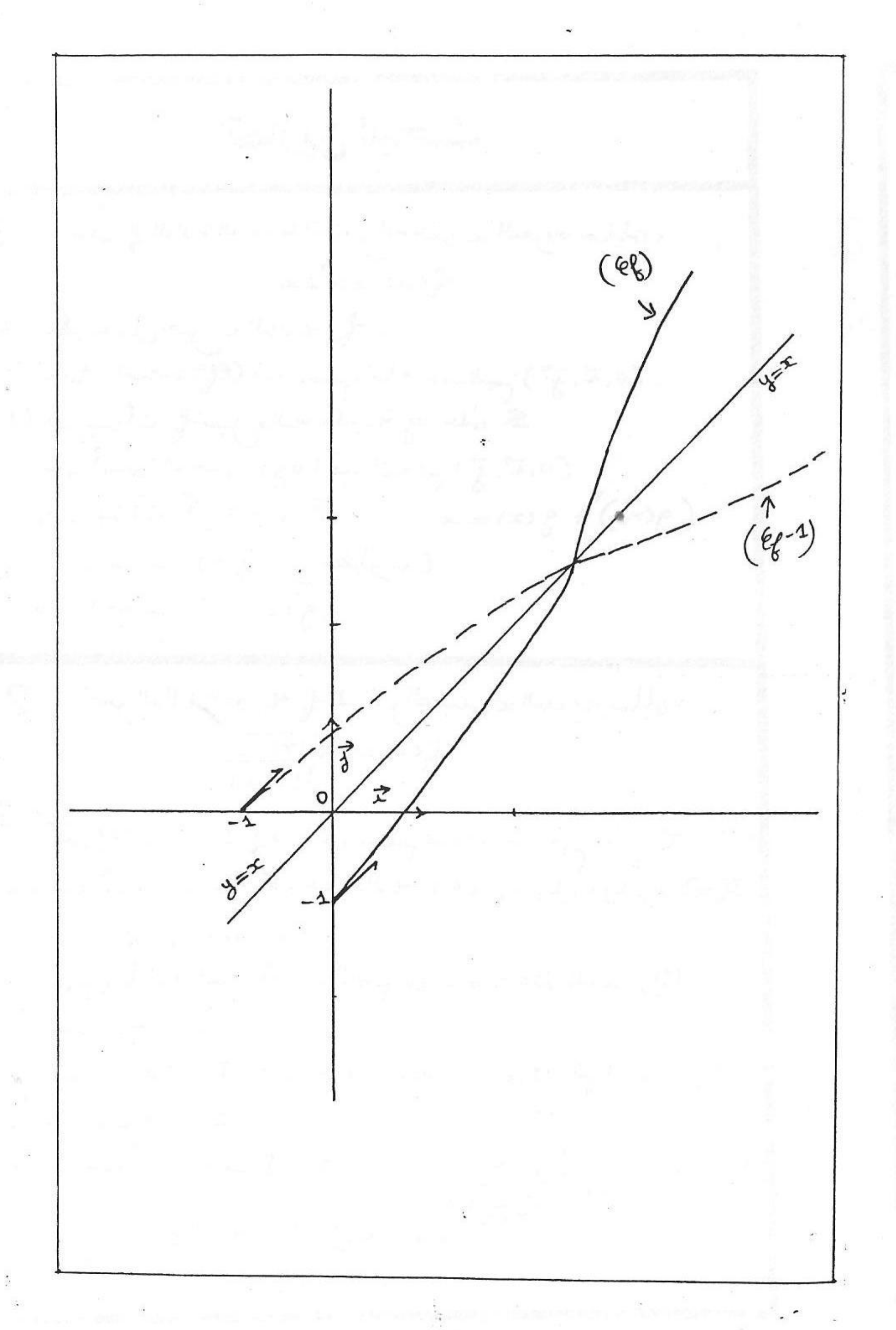
$$M(x,y)\in(\mathscr{C}_f)\cap(\Delta)\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\mathbb{R}^+\\ y=f(x)\\ y=x\end{cases}$$

إذن
$$f(x)=x\Leftrightarrow x-2+\sqrt[3]{x^2+1}=0$$
$$\Leftrightarrow\sqrt[3]{x^2+1}=2\Leftrightarrow x^2=7$$
$$\Leftrightarrow x=7$$

ومنه
$$(\mathscr{C}_f)\cap(\Delta)=\{A(\sqrt{7},\sqrt{7})\}$$

ج- إنشاء المنحنيين $(\mathscr{C}_f)$ و $(\mathscr{C}_{f^{-1}})$

المنحنى $(\mathscr{C}_{f^{-1}})$ هو مماثل المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ بالنسبة للمستقيم ذو المعادلة $y=x$



تمارين للبحث

1

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي:

$$f(x)=x^3+x$$

1) اعط جدول تغيرات الدالة f.
2) انشئ المنحنى (C_f) في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.
3) أ- بين أن f تقبل دالة عكسية g على $\mathbb{R}$
ب- أنشئ المنحنى (C_g) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$
ج- بين أن لكل x من $\mathbb{R}$ $(g(x))^3+g(x)=x$
(تحديد $g(x)$ غير مطلوب)
د- احسب $g'(0)$.

2

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي:

$$f(x)=x\sqrt{\frac{|x|-1}{|x|+1}}$$

وليكن (C_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) بين أن مجموعة تعريف الدالة f هي: $D_f=]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$
ثم ادرس زوجيتها.
2) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f في $x=1$ على اليمين وأول النتيجة هندسيا.
3) بين أن الدالة f تزايدية على المجال $]1,+\infty[$ ثم اعط جدول تغيراتها على D_f.
4) أ- بين أنه لكل x من $]1,+\infty[$ $f(x)-x=\frac{x}{x+1}\times\frac{-2}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+1}$
ثم حدد الفرع اللانهائي لـ (C_f) بجوار $+\infty$.
ب- أنشئ المنحنى (C_f).

3

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي:

$$f(x)=\sqrt{x+1}+\frac{1}{\sqrt{x+1}-1}$$

وليكن (C_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) تحقق من أن مجموعة تعريف الدالة f هي $D_f=[-1,0[\cup]0,+\infty[$
2) أ- احسب $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)$ و $\lim_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$
ب- احسب $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$. ماذا تستنتج؟
3) أ- ادرس قابلية اشتقاق f عند $x=-1$ على اليمين.
ب- احسب $f'(x)$ على $D_f-\{-1\}$ واعط جدول تغيرات الدالة f.
4) أ- تحقق من أن لكل x من $D_f-\{-1\}$ $f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}-1}-\frac{1}{(\sqrt{x+1}-1)^2}\right)$
ب- احسب $f''(x)$ وبين أن أفصول نقطة انعطاف (C_f) هو 8.
5) أنشئ مماس المنحنى (C_f) في نقطة الانعطاف ثم أنشئ (C_f).
6) ليكن g قصور الدالة f على المجال $I=[3,+\infty[$.
أ- بين أن g تقابل من I نحو مجال J يتم تحديده.
ب- احسب $(g^{-1})'(\frac{7}{2})$.

4

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي:

$$f(x)=\sqrt{x^3-3x} \quad ; \quad x\in[-\sqrt{3},0]\cup[\sqrt{3},+\infty[$$

وليكن (C_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) احسب النهايتين: $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$
ثم اعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها.
2) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في النقطتين $-\sqrt{3}$ و $\sqrt{3}$
ثم على اليسار في 0.
3) أ- احسب $f'(x)$ لكل x من $]-\sqrt{3},0[\cup]\sqrt{3},+\infty[$.
ب- ادرس إشارة $f'(x)$ واعط جدول تغيرات الدالة f.
4) أ- حدد نقطة تقاطع المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ والتي أفصولها موجب قطعا.

ب ـ أنشئ المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

5) ليكن g قصور الدالة f على المجال $I=[\sqrt{3},+\infty[$

أ ـ بين أن g تقابل من I نحو مجال J يتم تحديده .

ب ـ أنشئ المنحنى $(C_{g^{-1}})$ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

5

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي:

$$f(x)=|x|-\frac{1}{\sqrt{4x^2-1}}$$

وليكن (C_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) أ ـ تحقق من أن $D_f=]-\infty,-\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2},+\infty[$ وأنها زوجية .

ب ـ احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\ x>\frac{1}{2}}} f(x)$.

2) ادرس تغيرات الدالة f على $]\frac{1}{2},+\infty[$.

3) أ ـ ادرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

ب ـ بين أن المنحنى (C_f) يقطع محور الأفاصيل في نقطة ينتمي أفصولها إلى المجال $]\frac{3}{4},1[$.

ج ـ أنشئ المنحنى (C_f) .

4) ليكن g قصور الدالة f على المجال $I=]\frac{1}{2},+\infty[$.

أ ـ بين أن g تقابل من I نحو مجال J يتم تحديده .

ب ـ أنشئ المنحنى $(C_{g^{-1}})$ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

6

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي:

$$f(x)=(x+1)\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \quad x\in\mathbb{R}^*$$

1) احسب نهايات f عند محدات $\mathbb{R}^*$.

2) أ ـ احسب $f'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}^*$.

ب ـ بين أن إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}^*$ هي إشارة $x(x-1)$.

ج ـ اعط جدول تغيرات الدالة f .

3) ليكن (C_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

أ ـ بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x+1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f)

ب ـ ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .

ج ـ اعط معادلة ديكارتية لمماس المنحنى (C_f) في النقطة ذات الأفصول $x_0=-1$.

4) أنشئ المنحنى (C_f) .

5) ليكن g قصور الدالة f على المجال $I=[1,+\infty[$.

أ ـ حدد $g(I)$ و بين أن الدالة g تقبل دالة عكسية .

ب ـ أنشئ المنحنى $(C_{g^{-1}})$ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

7

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي:

$$f(x)=\frac{x}{x-1}(x^2+3)^{\frac{1}{3}}$$

ليكن (C_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) حدد مجموعة تعريف الدالة f : D_f .

2) أ ـ حدد نهايات الدالة f عند محدات D_f .

ب ـ حدد الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f) .

3) لتكن f' الدالة المشتقة للدالة f .

بين أن لكل x من D_f : $f'(x)=\frac{(x^2+3)^{-\frac{2}{3}}}{3(x-1)^2}(2x^2+x+3)(x-3)$

4) ضع جدول تغيرات الدالة f .

5) أنشئ المنحنى (C_f) (نقبل أن للمنحنى (C_f) نقطة انعطاف أفصولها أكبر من 3)

6) لتكن g قصور الدالة f على المجال $I=]1,3]$.

أ ـ بين أن g تقابل من I نحو مجال J يتم تحديده .

ب ـ ليكن g^{-1} التقابل العكسي للتقابل g .

أنشئ المنحنى $(C_{g^{-1}})$ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

8

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي :

$$\begin{cases} f(x) = x - 2\sqrt{x-1} & , x > 1 \\ f(x) = x + 2\sqrt{1-x} & , x \leq 1 \end{cases}$$

وليكن (C_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أ- ادرس اتصال الدالة f في $x_0=1$.

ب- ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين وعلى اليسار في 1 ثم اعط تأويلا هندسيا للنتيجتين المحصل عليهما.

3) أ- احسب $f'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

ب- اعط جدول تغيرات الدالة f .

4) أ- حدد الفرعين اللانهائيين للمنحنى (C_f).

ب- حدد تقاطع المنحنى (C_f) مع محور الأفاصيل.

ج- أنشئ المنحنى (C_f) .

5) لتكن g الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]2,+\infty[$ والتي تحقق : $g(2)=\frac{2}{3}$.

أ- اكتب $g(x)$ بدلالة x .

ب- اعط جدول تغيرات الدالة g .

9

نعتبر الدالة f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي :

$$\begin{cases} f(x) = x - \sqrt{x^2-x} & , x\in]-\infty,0]\cup[1,+\infty[\\ f(x) = 2\sqrt{x} - x & , x\in]0,1[\end{cases}$$

و (C_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) ادرس قابلية للاشتقاق الدالة f في $x_0=0$ و $x_1=1$

3) احسب $f'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}-\{0,1\}$ ثم استنتج تغيرات الدالة f .

4) ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f).

5) أنشئ المنحنى (C_f) .

6) ليكن g قصور الدالة f على المجال $I=[0,1]$.

أ- بين أن g تقابل من I نحو مجال J يتم تحديده .

ب- حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من J .

ج- أنشئ $(C_{g^{-1}})$ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

10

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي :

$$f(x) = x^3 - 3x - 3$$

1) ادرس تغيرات الدالة f .

2) ليكن g قصور الدالة f على المجال $I=[1,+\infty[$.

أ- بين أن الدالة g تقبل دالة عكسية g^{-1}. حدد حيز تعريف g^{-1}.

ب- بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α وأن

$$2 < \alpha < 3$$

ج- حدد مجال قابلية اشتقاق الدالة g^{-1} .

د- بين أن $g^{-1}(0) = \frac{1}{3(\alpha^2-1)}$

11

نعتبر الدالة f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي :

$$f(x) = \frac{1}{x^2+x} - \sqrt{x^2+x}$$

و (C_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) بين أن $D_f =]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$.

2) حدد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to0 \\ x>0}} f(x)$.

3) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة : $x=-\frac{1}{2}$ هو محور تماثل (C_f)

4) بين أن لكل x من $]0,+\infty[$:

$$f'(x) = -(2x+1)\left(\frac{1}{(x^2+x)^2} + \frac{1}{2\sqrt{x^2+x}}\right)$$

5) ضع جدول تغيرات الدالة f في المجال $]0,+\infty[$.

6) حدد الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

7) حل في $\mathbb{R}_+^*$ المعادلة : $f(x)=0$.

8) أنشئ المنحنى (C_f) .

12

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $]-\infty,4]$ بمايلي :

$$f(x)=x-4+2\sqrt{4-x}$$

ليكن (C_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

2) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليسار في $x_0=4$ ثم أول هندسيا النتيجة المحصل عليها .

3) أ - بين أن لكل x من $]-\infty,4[$: $f'(x)=\dfrac{\sqrt{4-x}-1}{\sqrt{4-x}}$

ب - ادرس إشارة $f'(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f.

4) ادرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

5) حدد نقط تقاطع المنحنى (C_f) ومحور الأفاصيل

6) اعط معادلة ديكارتية للمستقيم (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة ذات الأفصول $x_1=0$.

7) احسب $f(-5)$ ثم أنشئ المستقيم (T) والمنحنى (C_f) .

13

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي :

$$f(x)=2x-\frac{\sqrt{x^2+3}}{x}$$

و(C_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) أ - حدد D_f حيز تعريف الدالة f .

ب - بين أن الدالة f فردية .

نأخذ $I=]0,+\infty[$ مجال دراسة الدالة f .

2) احسب $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

3) أ - بين أن لكل x من I : $f(x)-(2x-1)=\dfrac{-3}{x(x+\sqrt{x^2+3})}$

ب - استنتج أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=2x-1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

ج - حدد وضع المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) على المجال I .

4) أ - بين أن لكل x من I : $f'(x)=2+\dfrac{3}{x^2\sqrt{x^2+3}}$

ب - ضع جدول تغيرات الدالة f على I .

5) أ - حدد نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع محور الأفاصيل على المجال I ثم اعط معادلة المماس للمنحنى (C_f) في هذه النقطة .

ب - نقبل أن إشارة $f''(x)$ هي عكس إشارة x من D_f . وأن قيمة مقربة للعدد الموجب α التي يحقق $f(\alpha)=\alpha$ هي $1,52$.

أنشئ المنحنى (C_f) (نأخذ $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm$) معللاً إنشاءك على المجال $]-\infty,0[$.

6) ليكن g قصور الدالة f على المجال $I=]0,+\infty[$.

أ - بين أن g تقابل من I نحو مجال J يتم تحديده .

ب - أنشئ المنحنى $(C_{g^{-1}})$ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

14

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي :

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}$$

1) حدد مجموعة تعريف الدالة f وتحقق من أن f دالة زوجية .

2) ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f)

3) احسب $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ ثم أول هندسيا النتيجة المحصل عليها .

4) أ - بين أنه لكل x من $D_f-\{-1,1\}$: $f'(x)=\dfrac{2-x^2}{x^3\sqrt{x^2-1}}$

ب - ادرس تغيرات الدالة f على المجال $[1,+\infty[$.

5) ليكن g قصور الدالة f على المجال $I=[\sqrt{2},+\infty[$.

أ- بين أن g تقابل من I نحو مجال J يتم تحديده.

ب- بين أن لكل x من I : $g^{-1}(x)=\sqrt{\frac{1+\sqrt{1-4x^2}}{2x^2}}$

6) أنشئ المنحنيين (C_f) و $(C_{g^{-1}})$ في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

15

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي :

$$\begin{cases} f(x)=x\sqrt{1-x} & , x<1 \\ f(x)=\sqrt[3]{x(x^2-1)} & , x\geq 1 \end{cases}$$

ليكن (C_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) بين أن الدالة f متصلة في النقطة $x_0=1$.

2) أ- ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند النقطة $x_0=1$ على اليسار وعلى اليمين .

ب- اعط تأويلا هندسيا للنتيجتين المحصل عليهما .

3) اعط جدول تغيرات الدالة f .

4) أ- احسب $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$. أول هندسيا النتيجة المحصل عليها .

ب- بين أن $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=0$ ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى (C_f)

ج- ادرس وضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) الذي معادلته : $y=x$.

5) أنشئ المنحنى (C_f)

16

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $[-1,+\infty[$ بمايلي : $f(x)=x\sqrt[3]{1+x}$

1) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في $x_0=-1$.

2) أ- بين أن لكل x من $]-1,+\infty[$: $f'(x)=\frac{4x+3}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}$

ب- ادرس تغيرات الدالة f

ج- بين أن لكل x من $]-1,+\infty[$: $f(x)\geq x$

3) ليكن (C_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

أ- اكتب معادلة ديكارتية لمماس (C_f) عند النقطة O

ب- أنشئ (C_f) ومماسه في النقطة O (نأخذ $\sqrt[3]{1/4}\simeq 0,6$)

17

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي :

$$\begin{cases} f(x)=\sqrt[3]{8-x^3}+x-2 & , x<2 \\ f(x)=\sqrt{x^2-2}+2-x & , x\geq 2 \end{cases}$$

1) حدد حيز تعريف الدالة f : D_f .

2) احسب نهايات الدالة f عند محدات D_f .

3) ادرس اتصال الدالة f في النقطة $x_0=2$.

4) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f في النقطة $x_0=2$ ، اعط تأويلا للنتيجة المحصل عليها .

5) حدد الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f)

6) لتكن g قصور الدالة f على المجال $I=[2,+\infty[$

أ- بين أن g تقابل من I نحو مجال J يتم تحديده .

ب- حدد الدالة g^{-1} .

7) انشئ المنحنيين (C_f) و $(C_{g^{-1}})$ معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

18

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي :

$$f(x)=x^3+2(x-1)^{\frac{3}{2}}$$

وليكن (C_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) أ- حدد حيز تعريف الدالة f : D

ب- احسب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$.

2) أ- بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على D .

ب- احسب $f'(x)$ لكل x من D .

ج- استنتج تغيرات الدالة f .

3) أ- حدد الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f) .

ب- أنشئ المنحنى (C_f) .

ج- بين أن f تقابل من D نحو D .

د- أنشئ المنحنى $(C_{f^{-1}})$ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

المتتاليات العددية

19 لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي :

$$f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)\sqrt{1+x^2}$$

وليكن (C_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) حدد حيز تعريف الدالة f : D_f .

2) ادرس تغيرات الدالة f .

3) أ- اثبت أن لكل x من D_f :

$$f(x)+x-1=\frac{x-1}{x}\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)$$

و

$$f(x)-x+1=\frac{x-1}{x}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$$

ب- استنتج أن المستقيمين (D) و (Δ) اللذين معادلتهما على التوالي : $y=x-1$ و $y=-x+1$ مقاربان للمنحنى (C_f) .

ج- ادرس وضع المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (D) .

4) نعتبر g قصور الدالة f على المجال $I=[0,+\infty[$.

أ- بين أن g تقابل من I نحو مجال J يتم تحديده .

ب- اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى g^{-1} عند النقطة ذات الأفصول $x_0=0$.

5) أنشئ المنحنيين (C_f) و $(C_{g^{-1}})$ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

20 نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي :

$$f(x)=\sqrt{\frac{x}{x-1}}-x$$

ليكن (C_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) حدد حيز تعريف الدالة f : D

2) احسب نهايات الدالة f عند محدات D .

3) أ- ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليسار في النقطة $x_0=0$.

ب- ادرس تغيرات الدالة f .

4) أ- حدد الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f) .

ب- ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم ذو المعادلة : $y=-x+1$

ج- حدد نقط تقاطع المنحنى (C_f) ومحور الأفاصيل ثم أنشئ (C_f) .

حساب حدود متتالية عددية

1 نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بمايلي :

$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = 2n^2 - 1$

1) احسب u_0 و u_1 و u_2 و u_3.

2) حدد بدلالة n الحدود : u_{n+1} و u_{n-1} و u_{2n} و u_{n^2}.

الجواب

1) لدينا $\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = 2n^2 - 1$

$u_0 = 2.0^2 - 1 = -1 \qquad u_1 = 2.1^2 - 1 = 1$

$u_2 = 2.2^2 - 1 = 7 \qquad u_3 = 2.3^2 - 1 = 17$

2) لدينا $u_n = 2n^2 - 1$

ومنه

$u_{n+1} = 2(n+1)^2 - 1 = 2n^2 + 4n + 2 - 1$

$u_{n+1} = 2n^2 + 4n + 1$

$u_{n-1} = 2(n-1)^2 - 1 = 2n^2 - 4n + 2 - 1$

$u_{n-1} = 2n^2 - 4n + 1$

$u_{2n} = 2(2n)^2 - 1 = 8n^2 - 1$

$u_{n^2} = 2(n^2)^2 - 1 = 2n^4 - 1$

2 نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بمايلي :

$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = 2^{3n+2}$

1) احسب u_1 و u_2.

2) حدد u_n بدلالة n.

3) بين أن لكل n من $\mathbb{N}$ $\quad u_{n+1} - 8u_n = 0$.

الجواب

1) لدينا $\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = 2^{3n+2}$

ومنه $u_1 = u_{0+1} = 2^{3.0+2} = 4$ و $u_2 = u_{1+1} = 3^{3.1+2} = 3^5 = 32$

2) لدينا $u_n = u_{(n-1)+1} = 2^{3(n-1)+2} = 2^{3n-1}$

3) لدينا لكل n من $\mathbb{N}$

$$u_{n+1} - 8u_n = 2^{3n+2} - 8\cdot 2^{3n-1}$$
$$= 2^{3n+2} - 2^3\cdot 2^{3n-1}$$
$$= 2^{3n+2} - 2^{3n+2}$$

ومنه $u_{n+1} - 8u_n = 0$

3 نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بمايلي :

$$\forall n\in\mathbb{N} \qquad u_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

1) احسب u_0+u_1 .

2) احسب المجموع $S=u_0+u_1+u_2+\dots+u_{2001}$

الجواب

1) لدينا $\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

$$u_0=\sqrt{0+1}-\sqrt{n}=1$$
$$u_1=\sqrt{1+1}-\sqrt{1}=\sqrt{2}-1$$

ومنه $u_0+u_1=\sqrt{2}-1+1=\sqrt{2}$

Astuce

إذا كان $u_n \quad f(n+1)-f(n)$ حيث f دالة عددية

فإن

$$u_p+u_{p+1}+\dots+u_q=f(q+1)-f(p)$$
$$u_0+u_1+\dots+u_n=f(n+1)-f(n)$$

مع n و p و q أعداد صحيحة طبيعية . $(q>p)$

البرهان

$$u_p=f(p+1)-f(p)$$
$$u_{p+1}=f(p+2)-f(p+1)$$
$$-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$$
$$u_{q-1}=f(q)-f(q-1)$$
$$u_q=f(q+1)-f(q)$$

بجمع طرف بطرف جميع المتساويات السابقة نحصل على :

$$u_p+u_{p+1}+\dots+u_q=f(q+1)-f(q)$$

2) نضع $f(x)=\sqrt{x}$.

لدينا $u_{n+1}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=f(n+1)-f(n)$

ولدينا $S=u_0+u_1+\dots+u_{2001}$

$$S=f(2001)-f(0)$$
$$S=\sqrt{2001}-\sqrt{0}$$

ومنه $S=\sqrt{2001}$.

4 نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة بمايلي :

$$\begin{cases} v_0=3 \\ v_{n+1}=\frac{1}{n+1}v_n+2 , \quad \forall n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

1) احسب v_1 و v_2 .

2) هل يمكن حساب v_{100} مباشرة ؟

3) حدد v_5 .

الجواب

1) لدينا $v_1=v_{0+1}=\frac{1}{0+1}v_0+2=3+2=5$

$$v_2=v_{1+1}=\frac{1}{1+1}v_1+2=\frac{5}{2}+2=\frac{9}{2}$$

2) ← لحساب حداً من حدود متتالية معرفة بطريقة ترجعية يجب معرفة الحد السابق .

← عندما يكون المدل كبيراً جداً الحساب يكون عادة صعب لهذا الغرض نحاول تحديد v_n بدلالة n .

لا يمكن حساب v_{100} مباشرة (لأن (v_n) متتالية ترجعية)

3) لدينا $v_5=\frac{1}{5}v_4+2$

ولدينا $v_4=\frac{1}{4}v_3+2$

$$v_3=\frac{1}{3}v_2+2$$

بما أن $v_2=\frac{9}{2}$ فإن $v_3=\frac{7}{2}$ و $v_4=\frac{23}{8}$ إذن $v_5=\frac{103}{40}$

5

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بمايلي:

$$\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=3u_n+2 \quad \forall n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

1) احسب u_1 و u_2.

2) حدد u_n بدلالة u_{n-1}.

الجواب 1) لدينا

$$u_1=u_{0+1}=3u_0+2=5$$

$$u_2=u_{1+1}=3u_1+2=17$$

2) لدينا $u_{n+1}=3u_n+2$

ومنه $u_n=3u_{n-1}+2$

6

بين بالترجع أن

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad 1+2+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\forall n\in\mathbb{N}^* \quad 1+q+q^2+\dots+q^n=\frac{q^{n+1}-1}{q-1} \quad (q\neq 1)$$

تذكير

لتكن $P(n)$ علاقة مرتبطة بالعدد الصحيح الطبيعي n. $n_0\in\mathbb{N}$

إذا كان العلاقة $P(n)$ صحيحة من أجل $n=n_0$. و $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$

فإن العلاقة $P(n)$ صحيحة لكل $n\geq n_0$.

الجواب * نعتبر العلاقة $P(n)$: $0+1+2+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

- من أجل $n=0$ لدينا $0=\frac{0(0+1)}{2}$ العلاقة $P(0)$ صحيحة
- نفترض أن $P(n)$ صحيحة أي $1+2+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

ولنبين أن $P(n+1)$ صحيحة أي $1+2+\dots+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$

لدينا $1+2+\dots+n+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)$

$$1+2+\dots+(n+1)=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

وبالتالي $\forall n\in\mathbb{N} \quad 1+2+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

** نعتبر العلاقة $Q(n)$ $\quad 1+q+q^2+\dots+q^n=\frac{q^{n+1}-1}{q-1}$

- من أجل $n=1$ لدينا $1+q=\frac{q^2-1}{q-1}=\frac{(q-1)(q+1)}{q+1}$

علاقة صحيحة.

- نفترض أن $1+q+q^2+\dots+q^n=\frac{q^{n+1}-1}{q-1}$

ولنبين أن $1+q+q^2+\dots+q^{n+1}=\frac{q^{n+2}-1}{q-1}$

لدينا

$$1+q+q^2+\dots+q^n+q^{n+1}=\frac{q^{n+1}-1}{q-1}+q^{n+1}$$

$$=\frac{q^{n+1}-1+q^{n+2}-q^{n+1}}{q-1}$$

إذن $1+q+q^2+\dots+q^{n+1}=\frac{q^{n+2}-1}{q-1}$

وبالتالي $\forall n\in\mathbb{N}^* \quad 1+q+q^2+\dots+q^n=\frac{q^{n+1}-1}{q-1}$

7

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بمايلي:

$$\begin{cases} u_0=a>0 \\ u_{n+1}=\frac{2}{u_n^2+1}, \quad \forall n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

1) احسب u_1 و u_2.

2) حدد قيمة العدد a لكي تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

تذكير

(u_n) متتالية ثابتة $\Longleftrightarrow$ $\forall n\in\mathbb{N} \quad u_{n+1}-u_n=0$

الجواب 1) لدينا $u_1=u_{0+1}=\frac{2}{u_0^2+1}=\frac{2}{a^2+1}$

$$u_2 = u_{1+1} = \frac{2}{u_1^2+1} = \frac{2}{\left(\frac{2}{a^2+1}\right)^2+1} = \frac{2(a^2+1)^2}{(a^2+1)^2+4}$$

٢) متتالية ثابتة (u_n) $\iff$ $\forall n\in\mathbb{N}\ \ u_{n+1}-u_n=0$

وبالخصوص إذا كان $n=1$

$$u_2-u_1=0 \iff \frac{2(a^2+1)^2}{4+(a^2+1)^2} = \frac{2}{a^2+1}$$

$$\iff 2(a^2+1)^3 = 8+2(a^2+1)^2$$

$$\iff (a^2+1)^3-(a^2+1)^2-4=0$$

$$\iff [(a^2+1)^3-2^3]-[(a^2+1)^2-2^2]=0$$

$$\iff (a^2-1)[(a^2+1)^2+2(a^2+1)+4]-(a^2-1)(a^2+3)=0$$

$$\iff (a^2-1)[(a^2+1)^2+2(a^2+1)+4-a^2-3]=0$$

$$\iff (a^2-1)((a^2+1)^2+a^2+3)=0$$

$\iff a=1$ أو $a=-1$ (لأن $(a^2+1)^2+a^2+3\neq 0$)

$\iff a=1$ (لأن $a>0$)

لكي تكون المتتالية (u_n) ثابتة يجب أن تكون $a=1$

لنبين بالترجع أن $\forall n\in\mathbb{N}\ \ u_n=1$

- من أجل $n=0$ لدينا $u_0=a=1$
- نفترض أن $u_n=1$ ولنبين أن $u_{n+1}=1$

لدينا $u_{n+1}=\frac{2}{u_n^2+1}=\frac{2}{1+1}=1$

وبالتالي $\forall n\in\mathbb{N}\ \ u_n=1$.

8

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} u_1=3 \\ u_{n+1}=\dfrac{(3n+3)u_n-8n-12}{n} \end{cases} ,\ n\in\mathbb{N}^*$$

بين بالترجع أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 2}$ مكبورة بالعدد 0.

متتالية : مصغورة - مكبورة - محدودة

- (u_n) متتالية مصغورة بالعدد m $\iff$ $(\forall n\in\mathbb{N})\ u_n\geq m$
  $\iff (\forall n\in\mathbb{N})\ u_n-m\geq 0$
- (u_n) متتالية مكبورة بالعدد M $\iff$ $(\forall n\in\mathbb{N})\ u_n\leq M$
  $\iff (\forall n\in\mathbb{N})\ u_n-M\leq 0$
- (u_n) متتالية محدودة $\iff$ (u_n) متتالية مكبورة ومصغورة
  $\iff (\exists (M;m)\in\mathbb{R}^2)(\forall n\in\mathbb{N})\ m\leq u_n\leq M$

الجواب: لنبين بالترجع أن: $u_n\leq 0$ $\ (\forall n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\})$

- من أجل $n=2$ لدينا $u_2=\frac{(3\times1+3)u_1-8\times1-12}{1}=$

إذن: $u_2\leq 0$.

- نفترض أن $u_n\leq 0$ ولنبين أن: $u_{n+1}\leq 0$.

لدينا $u_n\leq 0$ و $n>0$ إذن $(3n+3)u_n\leq 0$ و $-8n-12\leq 0$

ومنه فإن: $\frac{(3n+3)u_n-8n-12}{n}\leq 0$ أي $u_{n+1}\leq 0$

وبالتالي فإن: $u_n\leq 0$ $\ (\forall n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\})$

9

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بمايلي:

$$f(x)=\frac{x}{2}+\frac{2}{x}$$

1) بين أن: $f([2;3])\subset[2;3]$.

2) لتكن $(u_n)_{n\geq1}$ المتتالية العددية المعرفة بمايلي:

$$\begin{cases} u_1=3 \\ u_{n+1}=\dfrac{u_n}{2}+\dfrac{2}{u_n} \end{cases} ;(n\in\mathbb{N})$$

بين أن المتتالية (u_n) مصغورة بالعدد 2 .

الجواب 1) لدينا $f(x)=\frac{x}{2}+\frac{2}{x}$ $x\in[2,3]$

لنبين أن $f([2,3])\subset[2,3]$

لدينا $f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{2}{x^2}=\frac{x^2-4}{2x^2}$

$$f'(x)=\frac{(x-2)(x+2)}{2x^2}$$

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $x-2$ على $[2,3]$

ومنه $f'(x)\geq 0$ لكل x من $[2,3]$

بما أن f متصلة وتزايدية على $[2,3]$ فإن

$$f([2,3])=[f(2),f(3)]$$

$$f([2,3])=[2,\frac{13}{6}]$$

بما أن $[2,\frac{13}{6}]\subset[2,3]$ فإن $f([2,3])\subset[2,3]$ ،

2) لنبين بالترجع أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ مصغورة بالعدد 2

أي أن $2\leq u_n$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$

- من أجل $n=1$ لدينا
- نفترض أن $2\leq u_n$ ولنبين أن $2\leq u_{n+1}$.

لدينا $u_n\geq 2$ و f تزايدية على $[2,+\infty[$

إذن $f(u_n)\geq f(2)$ أي $\frac{u_n}{2}+\frac{2}{u_n}\geq 2$

أي $u_{n+1}\geq 2$

وبالتالي $u_n\geq 2$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$

ومنه المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ مصغورة بالعدد 2 .

10 لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بمايلي:

$$\begin{cases} u_0=3 \\ u_{n+1}=3-\frac{9}{4u_n}, & n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

بين أن لكل n من $\mathbb{N}$ $u_n>\frac{3}{2}$.

الجواب لنبين بالترجع أن $u_n>\frac{3}{2}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

- من أجل $n=0$ لدينا $u_0=3$ إذن $u_0>\frac{3}{2}$
- نفترض أن $u_n>\frac{3}{2}$ ولنبين أن $u_{n+1}>\frac{3}{2}$.

لدينا $u_{n+1}-\frac{3}{2}=3-\frac{9}{4u_n}-\frac{3}{2}$

$$=\frac{3}{2}-\frac{9}{4u_n}=\frac{6u_n-9}{4u_n}=\frac{6(u_n-\frac{3}{2})}{4u_n}$$

بما أن $u_n>\frac{3}{2}$ فإن $u_n-\frac{3}{2}>0$ و $u_n>0$

إذن $\frac{6(u_n-\frac{3}{2})}{4u_n}>0$ أي $u_{n+1}-3>0$

إذن $u_{n+1}>\frac{3}{2}$

وبالتالي $u_n>\frac{3}{2}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

11 1) لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $I=[2,3]$ بمايلي: $f(x)=\frac{5x+2}{x+3}$

أ- أنشئ جدول تغيرات الدالة f على المجال I .

ب- بين أن $f(I)\subset I$

2) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بمايلي:

$$\begin{cases} u_0=2 \\ u_{n+1}=f(u_n), & n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

باستعمال السؤال 1) بين بالترجع أن: $2\leq u_n\leq 3$ $\forall n\in\mathbb{N}$

الجواب 1) أ- لدينا $f(x)=\frac{5x+2}{x+3}$ $x\in[2,3]$

$$f'(x)=\frac{13}{(x+3)^2}>0$$

x	2	3
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$\frac{12}{5}$ ↗	$\frac{17}{6}$

ب- لنبين أن $f(I)\subset I$

من خلال جدول تغيرات الدالة f على المجال نستنتج أن

$$f(I)=\left[\frac{12}{5},\frac{17}{6}\right]$$

وبما أن $\left[\frac{12}{5},\frac{17}{6}\right]\subset I$ فإن $f(I)\subset I$

(لأن $2<\frac{12}{5}<\frac{17}{6}<3$)

2) لنبين بالترجع أن $\forall n\in\mathbb{N}\quad 2\leq u_n\leq 3$

- من أجل $n=0$ لدينا $u_0=2$ إذن $2\leq u_0\leq 3$
- نفترض أن $2\leq u_n\leq 3$ ولنبين أن $2\leq u_{n+1}\leq 3$

لدينا $2\leq u_n\leq 3$ إذن $u_n\in I$

وبما أن $f(I)\subset I$ فإن $f(u_n)\in I$

أي $u_{n+1}\in I$ أي $2\leq u_{n+1}\leq 3$

وبالتالي $\forall n\in\mathbb{N}\quad 2\leq u_n\leq 3$

12 نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بمايلي:

$$\begin{cases} u_0=2 \\ u_{n+1}=\dfrac{7u_n}{1+2u_n} \end{cases},\ n\in\mathbb{N}$$

بين بالترجع أن $\forall n\in\mathbb{N}\quad 0<u_n<3$

الجواب لنبين بالترجع أن $\forall n\in\mathbb{N}\quad 0<u_n<3$

- من أجل $n=0$ لدينا $u_0=2$ إذن $0<u_0<3$
- نفترض أن $0<u_n<3$ ولنبين أن $0<u_{n+1}<3$

* لدينا $u_n>0$ إذن $1+2u_n>0$ و $7u_n>0$

ومنه $\frac{7u_n}{1+2u_n}>0$ أي $u_{n+1}>0$

وبالتالي $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n>0$

** لدينا $u_{n+1}-3=\frac{7u_n}{1+2u_n}-3=\frac{7u_n-3-6u_n}{1+2u_n}$

إذن $u_{n+1}-3=\frac{u_n-3}{1+2u_n}$

بما أن $0<u_n<3$ فإن $u_n-3<0$ و $1+2u_n>0$

إذن $u_{n+1}-3<0$ أي $u_{n+1}<3$

وبالتالي $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n<3$

خلاصة $\forall n\in\mathbb{N}\quad 0<u_n<3$

13 نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بمايلي:

$$\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=\dfrac{u_n}{2+2^n u_n} \end{cases}$$

1) احسب u_1.

2) بين أن $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n>0$.

الجواب 1) لدينا $u_1=\frac{u_0}{2+2^0 u_0}=\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3}$

2) لنبين بالترجع أن $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n>0$

- من أجل $n=0$ لدينا $u_0=1$ إذن $u_0>2$.
- نفترض أن $u_n>0$ ولنبين أن $u_{n+1}>0$

بما أن $u_n>0$ فإن $2+2^n u_n>0$

ومنه $u_{n+1}=\frac{u_n}{2+2^n u_n}>0$

وبالتالي $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n>0$.

14 نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بمايلي:

$$\begin{cases} u_1=\dfrac{1}{3} \\ u_{n+1}=\dfrac{n+3+2nu_n}{3n+3} \end{cases},\ n\in\mathbb{N}^*$$

بين بالترجع أن $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad u_n\leq 1$.

الجواب لنبين أن $u_n \leq 1$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

- من أجل $n=1$ لدينا $u_1 = \frac{1}{2}$ إذن $u_1 \leq 1$
- نفترض أن $u_n \leq 1$ و لنبين أن $u_{n+1} \leq 1$

لدينا

$$u_{n+1} - 1 = \frac{n+3+2nu_n}{3n+3} - 1$$

$$= \frac{n+3+2nu_n-3n-3}{3n+3} = \frac{2n(u_n-1)}{3n+3}$$

بما أن $u_n \leq 1$ فإن $u_n - 1 \leq 0$ و $\frac{2n}{3n+3}$

إذن $u_{n+1} - 1 = \frac{2n(u_n-1)}{3n+3} \leq 0$ أي $u_{n+1} \leq 1$

وبالتالي $u_n \leq 1$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

15 نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بمايلي:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = -2 + \sqrt{5+(u_n+2)^2}, \; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

بين بالترجع أن $u_n \geq 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

الجواب لنبين بالترجع أن $u_n \geq 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$

- من أجل $n=0$ لدينا $u_0 = 1$ إذن $u_0 \geq 1$
- نفترض أن $u_n \geq 1$ ولنبين أن $u_{n+1} \geq 1$

لدينا $u_n \geq 1$ إذن $u_n + 2 \geq 3$ و $(u_n+2)^2 \geq 9$

إذن $5+(u_n+2)^2 \geq 14$ ومنه $\sqrt{5+(u_n+2)^2} \geq \sqrt{14}$

إذن $-2+\sqrt{5+(u_n+2)^2} \geq -2+\sqrt{14}$ أي $u_{n+1} \geq -2+\sqrt{14}$

وبما أن $-2+\sqrt{14} \geq 1$ فإن $u_{n+1} \geq 1$

وبالتالي $u_n \geq 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$

المتتاليات الدورية

تذكير

لتكن (u_n) متتالية عددية و p عدد من $\mathbb{N}^*$

(u_n) دورية دورها p $\Leftrightarrow$ $u_{n+p} = u_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

16 لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بمايلي:

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1+u_n}{1-u_n}, \; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) بين أن المتتالية (u_n) دورية دورها 4.

2) احسب u_{2001}.

الجواب 1) ليكن n من $\mathbb{N}$ لدينا $u_{n+1} = \frac{1+u_n}{1-u_n}$

$$u_{n+2} = \frac{1+u_{n+1}}{1-u_{n+1}} = \frac{1+\frac{1+u_n}{1-u_n}}{1-\frac{1+u_n}{1-u_n}}$$

$$u_{n+2} = \frac{1-u_n+1+u_n}{1-u_n-1-u_n} = -\frac{1}{u_n}$$

$$u_{n+3} = \frac{1+u_{n+2}}{1-u_{n+2}} = \frac{1-\frac{1}{u_n}}{1+\frac{1}{u_n}} = \frac{u_n-1}{u_n+1}$$

$$u_{n+4} = \frac{1+u_{n+3}}{1-u_{n+3}} = \frac{1+\frac{u_n-1}{u_n+1}}{1-\frac{u_n-1}{u_n+1}} = \frac{u_n+1+u_n-1}{u_n+1-u_n+1}$$

$$u_{n+4} = \frac{2u_n}{2}$$

إذن $u_{n+4} = u_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

ومنه (u_n) متتالية دورية دورها 4

تذكير

إذا كانت (u_n) متتالية دورية دورها p فإن $\forall n\in\mathbb{N}\ u_{(n+mp)}=u_n$

2) لدينا $u_{2001}=u_{(1+4\times500)}=u_1=\frac{1+u_0}{1-u_0}=\frac{1+2}{1-2}$

ومنه $u_{2001}=-3$

17 نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بمايلي:

$$\begin{cases} u_0=2 \\ u_{n+1}=\frac{1-u_n}{1+u_n} \end{cases},\ n\in\mathbb{N}$$

1) بين أن $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_{2n}=2$

2) استنتج أن $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_{2n+1}=-\frac{1}{3}$

الجواب 1) لنبين بالتراجع أن $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_{2n}=2$

- من أجل $n=0$ لدينا $u_0=2$ علاقة صحيحة
- نفترض أن $u_{2n}=2$ و لنبين أن $u_{2(n+1)}=2$

لدينا $u_{2(n+1)}=u_{2n+2}=u_{(2n+1)+1}$

$$u_{2(n+1)}=\frac{1-u_{2n+1}}{1+u_{2n+1}}=\frac{1-\frac{1-u_{2n}}{1+u_{2n}}}{1+\frac{1-u_{2n}}{1+u_{2n}}}=\frac{1+u_{2n}-1+u_{2n}}{1+u_{2n}+1-u_{2n}}$$

$$u_{2(n+1)}=\frac{2u_{2n}}{2}=u_{2n}=2$$

وبالتالي $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_{2n}=2$

2) لدينا $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_{2n+1}=\frac{1-u_{2n}}{1+u_{2n}}=\frac{1-2}{1+2}$

ومنه $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_{2n+1}=-\frac{1}{3}$

رتابة متتالية عددية

لتكن (u_n) متتالية عددية.

- (u_n) متتالية تزايدية $\Leftrightarrow$ $(\forall n\in\mathbb{N})\ u_{n+1}-u_n\geq 0$

إذا كانت (u_n) متتالية تزايدية فإن: $u_n\geq u_0$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

- (u_n) متتالية تناقصية $\Leftrightarrow$ $(\forall n\in\mathbb{N})\ u_{n+1}-u_n\leq 0$

إذا كانت (u_n) متتالية تناقصية فإن: $u_n\leq u_0$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

- (u_n) متتالية ثابتة $\Leftrightarrow$ $(\forall n\in\mathbb{N})\ u_{n+1}-u_n=0$

تقنية

طريقة	المبدأ
$u_n=f(n)$	$(u_n)_{n\geq n_0}$ تزايدية $\Leftarrow$ f تزايدية على $[n_0;+\infty[$ $(u_n)_{n\geq n_0}$ تناقصية $\Leftarrow$ f تناقصية على $[n_0;+\infty[$
الفرق	$u_{n+1}-u_n$: $>0 \Rightarrow$ (u_n) تزايدية $u_{n+1}-u_n$: $<0 \Rightarrow$ (u_n) تناقصية
الخارج	(u_n) متتالية موجبة قطعا. $\frac{u_{n+1}}{u_n}$: $<1 \Rightarrow$ (u_n) تناقصية $\frac{u_{n+1}}{u_n}$: $>1 \Rightarrow$ (u_n) تزايدية

لتكن $(u_n)_{n\geq1}$ المتتالية العددية المعرفة بمايلي: $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ u_n=2n-\frac{5}{n}$

ادرس رتابة المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$.

الجواب لدينا لكل n من $\mathbb{N}^*$: $u_n = 2n - \frac{5}{n}$

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $]0,+\infty[$ بمايلي:

$$f(x) = 2x - \frac{5}{x}$$

ولدينا $f'(x) = 2 + \frac{5}{x^2} > 0$

ومنه f دالة تزايدية على $]0,+\infty[$

وبما أن $u_n = f(n)$ و $n \geq 1$ فإن $n+1 > n \Rightarrow f(n+1) \geq f(n)$

إذن $u_{n+1} \geq u_n$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

وبالتالي (u_n) متتالية تزايدية.

19 نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بمايلي:

$$u_n = \frac{2n+1}{3n+1}$$

ادرس رتابة المتتالية (u_n).

الجواب لدينا لكل n من $\mathbb{N}$ $u_n = \frac{2n+1}{3n+1}$

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $[0,+\infty[$ بمايلي:

$$f(x) = \frac{2x+1}{3x+1}$$

ولدينا $f'(x) = \frac{-1}{(3x+1)^2} < 0$

ومنه f دالة تناقصية قطعا على $[0,+\infty[$

ومنه لكل n من $\mathbb{N}$ لدينا $n+1 > n \Rightarrow f(n+1) < f(n)$

إذن $u_{n+1} < u_n$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$

وبالتالي (u_n) متتالية تناقصية.

20 نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بمايلي:

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

ادرس رتابة المتتالية (u_n).

الجواب لدينا لكل n من $\mathbb{N}$ $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $[0,+\infty[$ بمايلي:

$$f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$

ولدينا $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$ لكل x من $]0,+\infty[$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}\sqrt{x}} < 0$$

إذن f دالة تناقصية على $[0,+\infty[$

وبما أن $u_n = f(n)$ لكل n من $\mathbb{N}$ فإن (u_n) متتالية تناقصية

21 نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq1}$ المعرفة بمايلي:

$$u_n = -2n^2 + 4n + 5$$

ادرس رتابة المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$.

الجواب لدينا لكل n من $\mathbb{N}^*$ $u_n = -2n^2 + 4n + 2$

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[1,+\infty[$ بمايلي:

$$f(x) = -2x^2 + 4x + 2$$

ولدينا $f'(x) = -4x + 4 \leq 0$

إذن f دالة تناقصية على $[1,+\infty[$

وبما أن $u_n = f(n)$ لكل n من $\mathbb{N}^*$ فإن $(u_n)_{n\geq1}$ متتالية تناقصية

22 نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq1}$ المعرفة بمايلي:

$$u_n = n - \sqrt{n}$$

ادرس رتابة المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$.

الجواب لدينا لكل n من $\mathbb{N}^*$ $u_n = n - \sqrt{n}$

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[1,+\infty[$ بمايلي:

$$f(x) = x - \sqrt{x}$$

ولدينا $f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}} > 0$

ومنه f دالة تزايدية على $[1,+\infty[$

وبما أن $u_n = f(n)$ لكل n من $\mathbb{N}^*$ فإن (u_n) متتالية تزايدية

23 نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بمايلي :

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{n u_n}{n+1} + \frac{1}{n+1} \quad , n\in\mathbb{N}^* \end{cases}$$

1) احسب u_2 .

2) بين أنه لكل n من $\mathbb{N}^*$: $u_n < 1$.

3) بين أن المتتالية (u_n) تزايدية واستنتج أن لكل n من $\mathbb{N}^*$: $u_n \geq \frac{1}{2}$

الجواب

1) لدينا $u_2 = \frac{1.u_1}{1+1}+\frac{1}{1+1} = \frac{1}{4}+\frac{1}{2}$

ومنه $u_2 = \frac{3}{4}$.

2) لنبين بالترجع أن $u_n < 1$ $\forall n\in\mathbb{N}$

- من أجل $n=1$ لدينا $u_1=\frac{1}{2}$ إذن $u_1<1$

- نفترض أن $u_n<1$ و لنبين أن $u_{n+1}<1$

لدينا $u_{n+1}-1 = \frac{nu_n}{n+1}+\frac{1}{n+1}-1$

$u_{n+1}-1=\frac{n(u_n-1)}{n+1}$

بما أن $u_n-1<0$ (لأن $u_n<1$) و $\frac{n}{n+1}>0$ (لأن $n\in\mathbb{N}^*$)

فإن $u_{n+1}-1=\frac{n(u_n-1)}{n+1}<0$ أي $u_{n+1}<1$

وبالتالي $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $u_n<1$

3) لنبين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ تزايدية .

لدينا $u_{n+1}-u_n = \frac{nu_n}{n+1}+\frac{1}{n+1}-u_n$

$u_{n+1}-u_n = \frac{nu_n+1-nu_n-u_n}{n+1} = \frac{1-u_n}{n+1}$

بما أن $1-u_n>0$ (لأن $u_n<1$) و $n+1>0$

فإن $\frac{1-u_n}{n+1}>0$ أي $u_{n+1}-u_n>0$

ومنه $(u_n)_{n\geq1}$ متتالية تزايدية إذن لكل n من $\mathbb{N}$ $u_n\geq u_1$ أي $u_n\geq\frac{1}{2}$

24 نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بمايلي :

$$\begin{cases}u_0=1\\ u_{n+1}=\frac{2+3u_n^2}{1+3u_n} \quad , n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

1) أ- بين أن لكل n من $\mathbb{N}$ $2-u_{n+1}=\frac{3u_n}{1+3u_n}(2-u_n)$

ب- بين بالترجع أن لكل n من $\mathbb{N}$: $0<u_n<2$

2) بين أن المتتالية (u_n) تزايدية .

الجواب

1) أ- ليكن n من $\mathbb{N}$ لدينا

$2-u_{n+1} = 2-\frac{2+3u_n^2}{1+3u_n} = \frac{2+6u_n-2-3u_n^2}{1+3u_n}$

ومنه $2-u_{n+1}=\frac{3u_n}{1+3u_n}(2-u_n)$

ب- لنبين بالترجع أن $0<u_n<2$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

- من أجل $n=0$ لدينا $u_0=1$ إذن $0<u_0<2$

- نفترض أن $0<u_n<2$ و لنبين أن $0<u_{n+1}<2$

لدينا $2-u_{n+1}=\frac{3u_n}{1+3u_n}(2-u_n)$

وبما أن $0<u_n<2$ فإن $0<2-u_n<2$ و $0<\frac{3u_n}{1+3u_n}<1$

إذن $2-u_{n+1}=\frac{3u_n}{1+3u_n}(2-u_n)>0$ و $u_{n+1}>0$

ومنه $0 < u_{n+1} < 2$

وبالتالي $0 < u_n < 2$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

2) لنبين أن (u_n) متتالية تزايدية .

ليكن n من $\mathbb{N}$ لدينا $u_{n+1} - u_n = \frac{2+3u_n^2}{1+3u_n} - u_n$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2+3u_n^2 - u_n - 3u_n^2}{1+3u_n} = \frac{2-u_n}{1+3u_n}$$

بما أن $0 < u_n < 2$ فإن $2 - u_n > 0$ و $1+3u_n > 0$

إذن $u_{n+1} - u_n = \frac{2-u_n}{1+3u_n} > 0$ ومنه (u_n) متتالية تزايدية

25 نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بمايلي :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{5} \\ u_{n+1} = u_n^2 + \frac{3}{4}u_n \quad , n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) بين أن لكل n من $\mathbb{N}$ $0 < u_n < \frac{1}{4}$

2) ادرس رتابة المتتالية (u_n) .

الجواب 1) لنبين بالترجع أن $0 < u_n < \frac{1}{4}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

- من أجل $n=0$ لدينا $u_0 = \frac{1}{5}$ إذن $0 < u_0 < \frac{1}{4}$

- نفترض أن $0 < u_n < \frac{1}{4}$ ولنبين أن $0 < u_{n+1} < \frac{1}{4}$

لدينا $0 < u_n < \frac{1}{4}$ إذن $0 < u_n^2 < \frac{1}{16}$ و $0 < \frac{3}{4}u_n < \frac{3}{16}$

إذن $0 < u_n^2 + \frac{3}{4}u_n < \frac{3}{16} + \frac{1}{16} = \frac{4}{16}$ أي $0 < u_{n+1} < \frac{1}{4}$

وبالتالي $0 < u_n < \frac{1}{4}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

2) ليكن n من $\mathbb{N}$ لدينا $u_{n+1} - u_n = u_n^2 - \frac{1}{4}u_n$

$u_{n+1} - u_n = u_n\left(u_n - \frac{1}{4}\right)$

وبما أن $u_n > 0$ و $u_n - \frac{1}{4} < 0$ فإن $u_{n+1} - u_n < 0$

ومنه (u_n) تناقصية .

26 نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بمايلي :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^2}{3} + 2} \quad , n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) بين بالترجع أن $u_n \geq \sqrt{3}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

2) ادرس رتابة المتتالية (u_n) .

الجواب 1) لنبين بالترجع أن $u_n \geq \sqrt{3}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

- من أجل $n=0$ لدينا $u_0 = 2$ إذن $u_0 \geq \sqrt{3}$

- نفترض أن $u_n \geq \sqrt{3}$ ولنبين أن $u_{n+1} \geq \sqrt{3}$

لدينا $u_n \geq \sqrt{3}$ إذن $u_n^2 \geq 3$ أي $\frac{u_n^2}{3} + 2 \geq 3$

ومنه $\sqrt{\frac{u_n^2}{3} + 1} \geq \sqrt{3}$ أي $u_{n+1} \geq \sqrt{3}$

وبالتالي $u_n \geq \sqrt{3}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

2) ليكن n من $\mathbb{N}$ لدينا $u_{n+1} - u_n = \sqrt{\frac{u_n^2}{3} + 2} - u_n$

$$= \frac{\frac{u_n^2}{3} + 2 - u_n^2}{\sqrt{\frac{u_n^2}{3} + 2} + u_n} = \frac{2(3 - u_n^2)}{3\left(\sqrt{\frac{u_n^2}{3} + 2} + u_n\right)}$$

بما أن $u_n \geq \sqrt{3}$ فإن $3 - u_n^2 \leq 0$ و $3\left(\sqrt{\frac{u_n^2}{3} + 2} + u_n\right) > 0$

ومنه $u_{n+1} - u_n \leq 0$

وبالتالي (u_n) متتالية تناقصية .

27 نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بمايلي :

$$\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = \frac{5+3u_n}{3+u_n} \quad , n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) احسب u_1 و u_2 .

2) بين أنه $u_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$

3) بين أن المتتالية (u_n) مكبورة بالعدد $\sqrt{5}$

4) ادرس رتابة المتتالية (u_n) .

الجواب 1) حساب u_1 و u_2 .

لدينا $u_1=\frac{5+3u_0}{3+u_0}=\frac{5-6}{3-2}$ ومنه $u_1=-1$

$u_2=\frac{5+3u_1}{3+u_1}=\frac{5-3}{3-1}$ ومنه $u_2=1$

2) لنبين بالترجع أن $u_n>0$ $\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$

- من أجل $n=2$ لدينا $u_2=1$ إذن $u_2>0$
- نفترض أن $u_n>0$ ولنبين أن $u_{n+1}>0$

بما أن $5+3u_n>0$ و $3+u_n>0$ (لأن $u_n>0$)

فإن $\frac{5+3u_n}{3+u_n}>0$ أي $u_{n+1}>0$

وبالتالي $u_n>0$ $\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$

3) لنبين أن (u_n) متتالية محدودة بالعدد $\sqrt{5}$

أي أن $u_n\leq\sqrt{5}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ (البرهان بالترجع)

- من أجل $n=0$ لدينا $u_0=2$ إذن $u_0\leq\sqrt{5}$
- نفترض أن $u_n\leq\sqrt{5}$ ولنبين أن $u_{n+1}\leq\sqrt{5}$

لدينا $u_{n+1}-\sqrt{5}=\frac{5+3u_n}{3+u_n}-\sqrt{5}=\frac{5+3u_n-3\sqrt{5}-\sqrt{5}u_n}{3+u_n}$

$u_{n+1}-\sqrt{5}=\frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}-3)-(\sqrt{5}-3)u_n}{3+u_n}=\frac{(\sqrt{5}-3)(\sqrt{5}-u_n)}{3+u_n}$

بما أن $u_n-\sqrt{5}<0$ و $\frac{\sqrt{5}-3}{3+u_n}>0$ (لأن $u_n<\sqrt{5}$)

فإن $\frac{(\sqrt{5}-3)(\sqrt{5}-u_n)}{3+u_n}<0$ أي $u_{n+1}-\sqrt{5}\leq 0$

ومنه $u_{n+1}\leq\sqrt{5}$

وبالتالي $u_n\leq\sqrt{5}$ $\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$

4) رتابة المتتالية (u_n)

ليكن n من $\mathbb{N}$

$u_{n+1}-u_n=\frac{5+3u_n}{3+u_n}-u_n$

$u_{n+1}-u_n=\frac{5+3u_n-3u_n-u_n^2}{3+u_n}=\frac{(\sqrt{5}-u_n)(\sqrt{5}+u_n)}{3+u_n}$

بما أن $\sqrt{5}+u_n>0$ و $3+u_n>0$

و $\sqrt{5}-u_n\geq 0$ (لأن $u_n\leq\sqrt{5}$)

فإن $\frac{(\sqrt{5}+u_n)(\sqrt{5}-u_n)}{3+u_n}\geq 0$ أي $u_{n+1}-u_n\geq 0$

ومنه (u_n) متتالية تزايدية .

28 نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بمايلي :

$$\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=\frac{2u_n}{3+\sqrt{u_n}} \end{cases}, n\in\mathbb{N}$$

1) احسب u_1 و u_2 .

2) بين أن (u_n) تناقصية .

الجواب 1) لدينا $u_1=\frac{2u_0}{3+\sqrt{u_0}}=\frac{2}{3+1}$ ومنه $u_1=\frac{1}{2}$

$u_2=\frac{2u_1}{3+\sqrt{u_1}}=\frac{1}{3+\frac{1}{\sqrt{2}}}$ ومنه $u_2=\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}+1}$

2) لنبين أن (u_n) تناقصية .

لدينا لكل n من $\mathbb{N}$ $u_n>0$.

ولدينا $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2}{3+\sqrt{u_n}}$

بما أن $\frac{2}{3+\sqrt{u_n}}<1$ (لأن $u_n>0$) أي $\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$

فإن $u_{n+1}<u_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$ (لأن $u_n>0$)

وبالتالي (u_n) تناقصية .

29 نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بمايلي :

$$u_n=\frac{2+(-1)^n}{n+1}, n\in\mathbb{N}$$

1) احسب u_0 و u_1 و u_2 و u_3 .

2) ادرس رتابة المتتالية (u_n) .

الجواب 1) لدينا $u_n = \frac{2+(-1)^n n}{n+1}$

$u_0 = \frac{2+(-1)^0 0}{0+1}$ ومنه $u_0 = 2$

$u_1 = \frac{2+(-1)^1 1}{1+1}$ ومنه $u_1 = \frac{1}{2}$

$u_2 = \frac{2+(-1)^2 2}{1+2}$ ومنه $u_2 = \frac{4}{3}$

$u_3 = \frac{2+(-1)^3 3}{1+3}$ ومنه $u_3 = \frac{-1}{4}$

2) رتابة المتتالية (u_n)

بما أن $u_0 > u_1$ و $u_1 < u_2$

فإن المتتالية (u_n) ليست رتيبة.

30

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بمايلي:

$$\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = \frac{2}{3-u_n} \quad , n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

1) بين أن $\forall n\in\mathbb{N} \quad 1 < u_n < 2$

2) تحقق من أن لكل n من $\mathbb{N}$ $u_{n+1}-u_n = \frac{(u_n-1)(u_n-2)}{3-u_n}$

3) استنتج رتابة المتتالية (u_n).

4) استنتج أن $u_n \leq \frac{3}{2}$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

الجواب 1) لنبين بالترجع أن $\forall n\in\mathbb{N} \quad 1 < u_n < 2$

- من أجل $n=0$ لدينا $u_0 = \frac{3}{2}$ إذن $1 < u_0 < 2$
- نفترض أن $1 < u_n < 2$ ولنبين أن $1 < u_{n+1} < 2$

نعتبر الدالة f المعرفة على $[2,3]$ بمايلي: $f(x) = \frac{2}{3-x}$

ولكل x من $[2,3]$ لدينا $f'(x) = \frac{2}{(3-x)^2} > 0$

إذن f تزايدية قطعاً على $[1,2]$.

وبما أن $1 < u_n < 2$ فإن $f(1) < f(u_n) < f(2)$
أي $1 < u_{n+1} < 2$

وبالتالي $\forall n\in\mathbb{N} \quad 1 < u_n < 2$

2) ليكن n من $\mathbb{N}$ لدينا $u_{n+1}-u_n = \frac{2}{3-u_n} - u_n$

$u_{n+1}-u_n = \frac{2-3u_n+u_n^2}{3-u_n} = \frac{u_n^2-2u_n-(u_n-2)}{3-u_n}$

$u_{n+1}-u_n = \frac{u_n(u_n-2)-(u_n-2)}{3-u_n}$

ومنه $\forall n\in\mathbb{N} \quad u_{n+1}-u_n = \frac{(u_n-2)(u_n-1)}{3-u_n}$

3) رتابة المتتالية (u_n).

لدينا لكل n من $\mathbb{N}$ $u_{n+1}-u_n = \frac{(u_n-2)(u_n-1)}{3-u_n}$

بما أن $1 < u_n < 2$ فإن $3-u_n > 0$ و $u_n-1 > 0$ و $u_n-2 < 0$

ومنه $\frac{(u_n-2)(u_n-1)}{3-u_n} < 0$ أي $u_{n+1}-u_n < 0$

وبالتالي (u_n) متتالية تناقصية قطعاً.

4) بما أن (u_n) تناقصية فإن $u_n \leq u_0$ $\forall n\in\mathbb{N}$
أي $u_n \leq \frac{3}{2}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

31

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بمايلي:

$$\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = 4 - \frac{3}{u_n} \quad , n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

1) بين بالترجع أن $\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n > 3$

2) بين أن المتتالية تناقصية واستنتج أن لكل n من $\mathbb{N}$ $3 < u_n \leq 6$

الجواب 1) لنبين بالترجع أن $\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n > 3$

- من أجل $n=0$ لدينا $u_0 = 6$ إذن $u_0 > 3$
- نفترض أن $u_n > 3$ ولنبين أن $u_{n+1} > 3$

لدينا $u_{n+1}-3 = 4-\frac{3}{u_n}-3 = 1-\frac{3}{u_n} = \frac{u_n-3}{u_n}$

بما أن $u_n > 3$ فإن $u_{n+1}-3 > 0$ أي $u_{n+1} > 3$

وبالتالي $\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n > 3$

2) لنبين أن المتتالية (u_n) تناقصية.

لدينا $u_{n+1}-u_n = 4-\frac{3}{u_n}-u_n = \frac{-u_n^2+4u_n-3}{u_n}$ $(n\in\mathbb{N})$

$u_{n+1}-u_n = -\frac{(u_n-3)(u_n-1)}{u_n} < 0$ (لأن $u_n>3$)

ومنه فإن المتتالية (u_n) تناقصية ومنه فإن $3<u_n\le u_0=6$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

المتتاليات الحسابية

لتكن (u_n) متتالية عددية.

- (u_n) متتالية حسابية أساسها r $\Longleftrightarrow$ $u_{n+1}-u_n=r$ $(\forall n\in\mathbb{N})$
- الحد العام لمتتالية حسابية:

$u_n=u_p+(n-p)r$ $(\forall (n;p)\in\mathbb{N}^2)$

$u_n=u_0+nr$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

- ثلاث حدود متتابعة لمتتالية حسابية.

(u_n) متتالية حسابية $\Longleftrightarrow$ $2u_{n+1}=u_n+u_{n+2}$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

- مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية.

عدد حدود المجموع

$$u_p+u_{p+1}+\dots+u_n=\frac{n-p+1}{2}(u_p+u_n)$$

الحد الأول للمجموع.

الحد الأخير للمجموع

32

لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها r.

1) حدد u_7 إذا علمت أن $u_0=-6$ و $r=4$.

2) حدد العدد r إذا علمت أن $u_{13}=6$ و $u_0=5$.

3) حدد u_0 إذا علمت أن $r=\frac{1}{3}$ و $u_{50}=\frac{1}{3}$.

الجواب بما أن (u_n) متتالية حسابية أساسها r فإن

$u_n=u_p+(n-p)r$ $\forall(n,p)\in\mathbb{N}^2$.

1) لدينا $u_7=u_0+7r$

بما أن $u_0=-6$ و $r=4$ فإن $u_7=-6+28$

ومنه $u_7=22$.

2) لدينا $u_{13}=u_0+13r$ إذن $r=\frac{1}{13}(u_{13}-u_0)$

بما أن $u_{13}=6$ و $u_0=5$ فإن $r=\frac{1}{13}(6-5)$

ومنه $r=\frac{1}{13}$.

3) لدينا $u_{50}=u_0+50r$ إذن $u_0=u_{50}-50r$

بما أن $u_{50}=\frac{1}{3}$ و $r=\frac{1}{3}$ فإن $u_0=\frac{1}{3}-\frac{50}{3}$

ومنه $u_0=-\frac{49}{3}$.

33

لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها r.

نضع $S_n=u_0+u_1+\dots+u_n$

1) نفترض أن $u_0=-4$ و $r=3$.
احسب S_{12}.

2) نفترض أن $u_{10}=10$ و $u_{1000}=10000$
احسب S_{100}.

3) نفترض أن $u_4=9$ و $S_4=55$
احسب u_0.

4) نفترض أن $S_{90}=2002$ و $r=\frac{1}{9}$
احسب u_0.

الجواب 1) لدينا $S_n = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n)$

$S_{12} = \frac{13}{2}(u_0 + u_{12})$

بما أن (u_n) متتالية حسابية فإن $u_{12} = u_0 + 12r$

بما أن $u_0 = -4$ و $r = 3$ فإن $u_{12} = -4 + 36$

أي $u_{12} = 32$

ومنه $S_{12} = \frac{13}{2}(-4 + 32)$ أي $S_{12} = 182$

2) لدينا $S_{100} = \frac{101}{2}(u_0 + u_{100})$

لنحدد u_{100} لدينا $u_{100} = u_0 + 100r$

لدينا $u_{1000} = u_{10} + 990r$ أي $r = \frac{1}{990}(u_{100} - u_{10})$

بما أن $u_{10} = 10$ و $u_{1000} = 1000$ فإن $r = 1$

لدينا $u_0 = u_{10} - 10r$ إذن $u_0 = 0$

$u_{100} = u_0 + 100r$ إذن $u_{100} = 100$

ومنه $S_{100} = \frac{101}{2}(0 + 100)$

أي $S_{100} = 5050$

3) لدينا $S_4 = \frac{5}{2}(u_0 + u_4)$

إذن $u_0 = \frac{2}{5}S_4 - u_4$

بما أن $S_4 = 55$ و $u_4 = 9$ فإن $u_0 = 22 - 9$

ومنه $u_0 = 13$.

4) لدينا $S_{90} = \frac{91}{2}(u_0 + u_{90})$

بما أن $u_{90} = u_0 + 90r$ فإن $S_{90} = \frac{91}{2}(2u_0 + 90r)$

ومنه $u_0 = \frac{1}{91}S_{90} - 45r$

بما أن $S_{90} = 2002$ و $r = \frac{1}{9}$

فإن $u_0 = \frac{1547}{91}$.

34 لتكن (u_n) المتتالية الحسابية التي أساسها r وحدها الأول u_0 بحيث:
$$\begin{cases} u_0 - u_4 = 6 \\ 2u_0 + u_4 = 3 \end{cases}$$

1) حدد u_0 و u_4.

2) حدد الأساس r.

3) حدد u_n بدلالة n.

4) احسب المجموع $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{49}$

الجواب 1) لدينا
$$\begin{cases} u_0 - u_4 = 6 & (1) \\ 2u_0 + u_4 = 3 & (2) \end{cases}$$

لدينا $(1) + (2) \Leftrightarrow 3u_0 = 9 \Leftrightarrow u_0 = 3$.

ولدينا $u_4 = 3 - 2u_0 = 3 - 6 = -3$

إذن $u_4 = -3$ و $u_0 = 3$

2) لدينا $u_4 = u_0 + 4r$

إذن $r = \frac{1}{4}(u_4 - u_0)$ أي $r = \frac{1}{4}(-3 - 3)$

ومنه $r = \frac{-3}{2}$

3) لدينا $u_n = u_0 + nr$

ومنه $u_n = 3 - \frac{3}{2}n$. $\forall n \in \mathbb{N}$

4) لدينا $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{49} = \frac{50}{2}(u_0 + u_{49})$

بما أن $u_{49} = 3 + 49 \times -\frac{3}{2}$ فإن $u_{49} = -\frac{141}{2}$

إذن $S = 25\left(3 - \frac{141}{2}\right)$

ومنه $S = \frac{3375}{2}$

35

حدد العدد الحقيقي x حيث تكون الأعداد $x+1$ و x و $2x-1$ في هذا الترتيب حدود متتالية حسابية

الجواب

تكون الأعداد $x+1$ و x و $2x-1$ في هذا الترتيب حدود متتالية حسابية إذا وفقط إذا كان: $2x=(x+1)+(2x-1)$

أي $2x=3x$ ومنه $x=0$.

الأعداد هي 1 و 0 و -1 حدود متتابعة لمتتالية حسابية أساسها $r=0-1=-1$

36

حدد الأعداد الحقيقية a و b و c

بحيث
$$\begin{cases} a \text{ و } b \text{ و } c \text{ هي حدود متتابعة لمتتالية حسابية} \\ a+b+c=9 \\ 2a+b-c=0 \end{cases}$$

الجواب

لدينا
$$\begin{cases} a \text{ و } b \text{ و } c \text{ هي حدود متتابعة لمتتالية حسابية} \\ a+b+c=9 \\ 2a+b-c=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2b=a+c \\ a+b+c=9 \\ 2a+b-c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b=a+c \\ 3b=9 \\ 2a+b-c=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=3 \\ a+c=6 \\ 2a-c=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=3 \\ 3a=3 \\ a+c=6 \end{cases}$$

ومنه
$$\begin{cases} a=1 \\ b=3 \\ c=5 \end{cases}$$

الأعداد 1 و 3 و 5 هي حدود متتابعة لمتتالية حسابية أساسها: $r=3-1=2$

37

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بمايلي:
$$\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=\sqrt{2+u_n^2}, \; n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

1) احسب u_1 و u_2 .

2) نضع $v_n=u_n^2$ $\quad n\in\mathbb{N}$

أ- بين أن المتتالية (v_n) حسابية محددا أساسها.

ب- استنتج u_n بدلالة n

الجواب

1) لدينا $u_1=\sqrt{2+u_0^2}=\sqrt{2+1}=\sqrt{3}$

$u_2=\sqrt{2+u_1^2}=\sqrt{2+3}=\sqrt{5}$

2) أ- لنبين أن (v_n) متتالية حسابية:

لدينا $v_n=u_n^2$

$v_{n+1}=u_{n+1}^2=2+u_n^2$

$v_{n+1}-v_n=2+u_n^2-u_n^2=2$

ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها $r=2$

ب- لدينا (v_n) متتالية حسابية أساسها $r=2$ وحدها الأول $v_0=u_0^2=1$ إذن $v_n=v_0+nr=1+2n$

بما أن $v_n=u_n^2$ فإن $u_n=\sqrt{v_n}$

ومنه $u_n=\sqrt{2n+1}$ $\quad \forall n\in\mathbb{N}$

38

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بمايلي:
$$\begin{cases} u_0=2 \\ u_{n+1}=\dfrac{2u_n-1}{u_n}, \; n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

نضع $v_n=\dfrac{1}{u_n-1}$ $\quad n\in\mathbb{N}$

1) بين أن (v_n) متتالية حسابية محددا أساسها.

2) حدد v_n ثم u_n بدلالة n .

الجواب 1) لنبين أن (v_n) متتالية حسابية

لدينا $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}-1} = \frac{1}{\frac{2u_n-1}{u_n} - 1} = \frac{u_n}{2u_n - 1 - u_n}$$

$$v_{n+1} = \frac{u_n}{u_n - 1}$$

ولدينا $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n}{u_n-1} - \frac{1}{u_n-1}$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n-1}{u_n-1} = 1$$

ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها $r=1$

2) لدينا $v_n = v_0 + nr$

بما أن $v_0 = \frac{1}{u_0-1} = 1$ و $r = 1$

فإن $v_n = 1 + n$ $\quad \forall n\in\mathbb{N}$

ولدينا $v_n = \frac{1}{u_n-1}$ إذن $u_n = \frac{1}{v_n}+1$

ومنه $u_n = \frac{1}{n+1}+1$ أي $u_n = \frac{n+2}{n+1}$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$

39

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + 4\sqrt{u_n+1} + 4 \ , n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

1) بين أن $u_n \geq 0$ $\quad \forall n\in\mathbb{N}$

2) نعتبر المتتالية العددية (v_n) بحيث $v_n = \sqrt{u_n+1}$ $\quad n\in\mathbb{N}$

أ- احسب v_0 .

ب- تحقق من أن $u_n + 4\sqrt{u_n+1} + 5 = (\sqrt{u_n+1}+2)^2$

ج- بين أن (v_n) متتالية حسابية محدداً أساسها .

د- احسب v_n ثم u_n بدلالة n .

هـ- احسب بدلالة n المجموع $v_0+v_1+\dots+v_n$

الجواب 1) لنبين بالترجع أن $u_n \geq 0$ $\quad \forall n\in\mathbb{N}$

- من أجل $n=0$ لدينا $u_0=0$ إذن $u_0 \geq 0$.
- نفترض أن $u_n\geq 0$ ولنبين $u_{n+1}\geq 0$

بما أن $u_n \geq 0$ فإن $u_n+4\geq 0$ و $4\sqrt{u_n+1}$

إذن $u_n+4+4\sqrt{u_n+1}\geq 0$ أي $u_{n+1}\geq 0$

وبالتالي $u_n\geq 0$ $\quad \forall n\in\mathbb{N}$

2) أ- لدينا $v_0 = \sqrt{u_0+1} = \sqrt{0+1} = 1$

ب- لدينا $(\sqrt{u_n+1}+2)^2 = \sqrt{u_n+1}^2 + 4\sqrt{u_n+1} + 2^2$

$$= u_n+1+4\sqrt{u_n+1}+4$$

ومنه $(\sqrt{u_n+1}+2)^2 = u_n + 4\sqrt{u_n+1}+5$

ج- لنبين أن (v_n) متتالية حسابية .

لدينا $v_n = \sqrt{u_n+1}$

$$v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}+1} = \sqrt{u_n+4\sqrt{u_n+1}+5}$$

$$v_{n+1} = \sqrt{(\sqrt{u_n+1}+2)^2} = \sqrt{u_n+1}+2$$

إذن $v_{n+1}-v_n = 2$

ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها $r=2$

د- لدينا (v_n) متتالية حسابية أساسها $r=2$ وحدها الأول $v_0=1$ إذن $v_n = v_0+nr$ $\quad \forall n\in\mathbb{N}$

ومنه $v_n = 1+2n$

ولدينا $v_n=\sqrt{u_n+1} \Rightarrow u_n = v_n^2-1$

$$u_n = (2n+1)^2 - 1$$

ومنه $u_n = 4n^2+4n$ $\quad \forall n\in\mathbb{N}$

هـ- لدينا $v_0+v_1+\dots+v_n = \frac{n+1}{2}(v_0+v_n)$

$$= \frac{n+1}{2}(1+1+2n)$$

ومنه $v_0+v_1+\dots+v_n = (n+1)^2$

40

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بمايلي :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2+2n+3} \end{cases} , n\in\mathbb{N}$$

1) بين أن لكل k من $\mathbb{N}$: $u_{k+1}^2 - u_k^2 = 2k+3$

2) بين أن (u_n) متتالية حسابية محدداً أساسها .

الجواب

1) ليكن k عدداً من $\mathbb{N}$ لدينا

$$u_{k+1}^2 = \left(\sqrt{u_k^2+2k+3}\right)^2 = u_k^2+2k+3$$

ومنه $u_{k+1}^2 - u_k^2 = 2k+3$

2) لنبين أن (v_n) متتالية حسابية .

لدينا $\forall k\in\mathbb{N}$ $u_{k+1}^2 - u_k^2 = 2k+3$

إذن

$$\begin{cases} u_1^2 - u_0^2 = 2.0+3 \\ u_2^2 - u_1^2 = 2.1+3 \\ - - - - - - - - \\ u_{n-1}^2 - u_{n-2}^2 = 2(n-2)+3 \\ u_n^2 - u_{n-1}^2 = 2(n-1)+3 \end{cases}$$

بجمع طرف بطرف هذه المتساويات نحصل على

$$u_n^2 - u_0^2 = 2\underbrace{(1+2+\dots+(n-1))}_{\frac{(n-1)n}{2}} + \underbrace{(3+3+\dots+3)}_{n \text{ مرة}}$$

إذن $u_n^2 = n^2 - n + 3n + u_0^2$

$$u_n^2 = n^2+2n+1$$

$$u_n^2 = (n+1)^2$$

بما أن $u_n \geq 0$ فإن $u_n = n+1$ $\forall n\in\mathbb{N}$

$$u_{n+1}-u_n = (n+2)-(n+1) = 1$$

ومنه (u_n) متتالية حسابية أساسها $r=1$

41

لتكن (u_n) متتالية عددية تحقق العلاقة :

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad u_0+u_1+\dots+u_n = \frac{1}{3}(n^2+n)$$

بين أن (u_n) متتالية حسابية .

الجواب ليكن n من $\mathbb{N}$ نضع $S_n = u_0+u_1+\dots+u_n$

$$S_{n+1} = u_0+u_1+\dots+u_{n+1}$$

$$S_{n+1} - S_n = u_{n+1}$$

ولدينا $S_n = \frac{1}{3}(n^2+n)$

$$S_{n+1} = \frac{1}{3}\left((n+1)^2+(n+1)\right)$$

$$S_{n+1} = \frac{1}{3}(n^2+2n+1+n+1) = \frac{1}{3}(n^2+3n+2)$$

إذن $u_{n+1} = \frac{1}{3}(n^2+3n+2-n^2-n)$

$$u_{n+1} = \frac{2}{3}(n+1)$$

ومنه $\forall n\in\mathbb{N}$ $u_n = \frac{2}{3}n$

ولدينا $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}(n+1) - \frac{2}{3}n = \frac{2}{3}$

وبالتالي (u_n) متتالية حسابية أساسها $r = \frac{2}{3}$.

42

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بمايلي :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{7u_n - 25}{u_n - 3} \end{cases} , n\in\mathbb{N}$$

1) بين أن $u_n \neq 5$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

2) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة بمايلي :

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad v_n = \frac{1}{u_n - 5}$$

أ- بين أن (v_n) متتالية حسابية .

ب- احسب v_n بدلالة n .

ج- استنتج u_n بدلالة n .

الجواب 1) لنبين بالترجع أن $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n\neq 5$

- من أجل $n=0$ لدينا $u_0=2$ إذن $u_0\neq 5$
- نفترض أن $u_n\neq 5$ ولنبين أن $u_{n+1}\neq 5$

لدينا $u_{n+1}-5=\frac{7u_n-25}{u_n-3}-5=\frac{7u_n-25-5u_n+15}{u_n-3}$

$u_{n+1}-5=\frac{2(u_n-5)}{u_n-3}\neq 0$ (لأن $u_n\neq 5$)

إذن $u_{n+1}\neq 5$

وبالتالي $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n\neq 5$

2) أ- لنبين أن (v_n) متتالية حسابية

ليكن n من $\mathbb{N}$ لدينا $v_n=\frac{1}{u_n-5}$

$v_{n+1}=\frac{1}{u_{n+1}-5}=\frac{1}{\frac{2(u_n-5)}{u_n-3}}=\frac{u_n-3}{2(u_n-5)}$

ولدينا $v_{n+1}-v_n=\frac{u_n-3}{2(u_n-5)}-\frac{1}{u_n-5}=\frac{u_n-5}{2(u_n-5)}$

إذن $v_{n+1}-v_n=\frac{1}{2}$ ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها $r=\frac{1}{2}$

ب- لدينا $v_n=v_0+nr$ و $v_0=\frac{1}{u_0-5}=-\frac{1}{3}$

إذن $v_n=-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}n$

$\forall n\in\mathbb{N}\quad v_n=\frac{1}{6}(3n-2)$

ج- لدينا $v_n=\frac{1}{u_n-5}\iff u_n-5=\frac{1}{v_n}$

$\iff u_n=\frac{1}{v_n}+5=\frac{5v_n+1}{v_n}$

إذن $u_n=\frac{\frac{5}{6}(3n-2)+1}{\frac{1}{6}(3n-2)}$

ومنه $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=\frac{15n-4}{3n-2}$

43 نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بمايلي:

$$\begin{cases} u_0=\frac{1}{2} \text{ و } u_1=7 \\ u_{n+2}=4(u_{n+1}-u_n), \quad n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

ليكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة بمايلي:

$\forall n\in\mathbb{N}\quad v_n=\frac{u_n}{2^n}$

1) بين أن (v_n) متتالية حسابية محدداً أساسها وحدها الأول.

2) أ- حدد v_n بدلالة n.

ب- استنتج u_n بدلالة n.

ج- احسب بدلالة n المجموع $v_0+v_1+\dots+v_n$.

الجواب 1) لنبين أن (v_n) متتالية حسابية.

ليكن n من $\mathbb{N}$ لدينا

$v_{n+2}+v_n=\frac{u_{n+2}}{2^{n+2}}+\frac{u_n}{2^n}$

$=\frac{4(u_{n+1}-u_n)}{2^{n+2}}+\frac{u_n}{2^n}=\frac{4u_{n+1}-4u_n+4u_n}{2^{n+2}}$

$=\frac{4u_{n+1}}{2^{n+2}}=2\cdot\frac{u_{n+1}}{2^{n+1}}$

إذن $\forall n\in\mathbb{N}\quad v_{n+2}+v_n=2v_{n+1}$

ومنه (v_n) متتالية حسابية حدها الأول $v_0=\frac{1}{2}$

وأساسها $r=v_1-v_0=\frac{7}{2}-\frac{1}{2}=3$.

2) أ- لدينا $v_n=v_0+nr$

ومنه $\forall n\in\mathbb{N}\quad v_n=\frac{1}{2}+3n$

ب- لدينا $v_n=\frac{u_n}{2^n}$ إذن $u_n=2^n\cdot v_n$

ومنه $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=2^n\left(\frac{1}{2}+3n\right)$

ج- لدينا $v_0+v_1+\dots+v_n=\frac{n+1}{2}(v_0+v_n)$

ومنه $v_0+v_1+\dots+v_n=\frac{(n+1)(3n+1)}{2}$

المتتاليات الهندسية

لتكن (u_n) متتالية عددية .

- (u_n) متتالية هندسية أساسها q $\Leftrightarrow$ $(\forall n\in\mathbb{N})\ u_{n+1}=q u_n$
- الحد العام لمتتالية هندسية :

$u_n=u_p\times(q)^{n-p}$ $\quad(\forall(n;p)\in\mathbb{N}^2)$

$u_n=u_0\times q^n$ $\quad(\forall n\in\mathbb{N})$

- ثلاث حدود متتابعة لمتتالية هندسية .

(u_n) متتالية هندسية $\Leftrightarrow$ $(\forall n\in\mathbb{N})\ u_{n+1}^2=u_n\times u_{n+2}$

- مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية .

$$u_p+u_{p+1}+\dots+u_n=u_p\times\frac{1-q^{(n-p+1)}}{1-q}\qquad(q\neq1)$$

$(n-p+1)$: عدد حدود المجموع

u_p : الحد الأول للمجموع

q : الأساس

44 لتكن (u_n) المتتالية الهندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ وحدها الأول $u_0=3$.

1) احسب u_n بدلالة n .

2) احسب u_1 و u_2 و u_3 .

3) احسب المجموع $S=u_0+u_1+\dots+u_6$.

الجواب

1) لدينا $u_n=u_0\times q^n$ $\quad\forall n\in\mathbb{N}$

ومنه $u_n=3\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$ $\quad\forall n\in\mathbb{N}$

2) لدينا $u_1=3\times\left(\frac{1}{2}\right)^1$ ومنه $u_1=\frac{3}{2}$

لدينا $u_2=3\times\left(\frac{1}{2}\right)^2$ ومنه $u_2=\frac{3}{4}$

لدينا $u_2=3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3$ ومنه $u_3=\frac{3}{8}$

3) لدينا $S=u_0+u_2+\dots+u_6=u_0\times\frac{1-q}{1-q}$

$$=3\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^7}{1-\frac{1}{2}}=6\left(1-\frac{1}{128}\right)$$

ومنه $S=u_0+u_1+\dots+u_6=\frac{381}{64}$

45 لتكن (u_n) المتتالية الهندسية بحيث :

$$\begin{cases}3u_1+2u_2=21\\5u_1-u_2=9\end{cases}$$

1) احسب u_1 و u_2 .

2) حدد الأساس q للمتتالية (u_n) .

3) احسب u_n بدلالة n .

4) احسب المجموع $u_1+u_2+\dots+u_5$.

الجواب 1) لدينا

$$\begin{cases}3u_1+2u_2=21\\5u_1-u_2=9\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3u_1+2u_2=21 & (1)\\10u_1-2u_2=18 & (2)\end{cases}$$

$(1)+(2)\Leftrightarrow 13u_1=39\Leftrightarrow u_1=3$

ولدينا $5u_1 - u_2 = 9 \Leftrightarrow u_2 = 5u_1 - 9 = 15 - 9 = 6$

ومنه $u_1 = 3$ و $u_2 = 6$

3) ليكن q أساس للمتتالية (u_n).

لدينا $u_2 = q u_1$ إذن $q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{6}{3}$

ومنه $q = 2$.

3) لدينا $u_n = u_1 \times q^{n-1}$ ومنه $u_n = 3.(2)^{n-1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

4) لدينا $u_1 + u_2 + \dots + u_5 = u_1 \times \frac{1-q^5}{1-q} = 3 \times \frac{1-2^5}{1-2}$ ،

ومنه $u_1 + u_2 + \dots + u_5 = 93$

46

لتكن a و b و c ثلاثة أعداد حقيقية مختلفة مثنى ، مثنى وتحقق مايلي : (1) a و b و c تكوّن في هذا الترتيب متتالية حسابية.

(2) b و c و a تكوّن في هذا الترتيب متتالية هندسية.

(3) $a + b + c = 18$

احسب مجموع الحدود الستة الأولى لكل من المتتاليتين.

الجواب - تحديد الأعداد a و b و c.

حسب المعطيات لدينا

$$\begin{cases} 2b = a + c \\ c^2 = ab \\ a + b + c = 18 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2b = a + c \\ c^2 = ab \\ 3b = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 6 \\ c = 12 - a \\ (12-a)^2 = 6a \end{cases}$$

لدينا $(12-a)^2 = 6a \Leftrightarrow a^2 - 30a + 144 = 0$

$\Leftrightarrow (a-24)(a-6) = 0$.

$\Leftrightarrow a = 24$ أو $a = 6$

بما أن $a \neq b$ و $b = 6$ فإن $a \neq 6$.

ومنه $a = 24$

ولدينا $c = 12 - a = 12 - 24 = -12$

وبالتالي الأعداد الثلاثة هي $a = 24$ و $b = 6$ و $c = -12$

* لدينا 24 و 6 و -12 هي الحدود الثلاثة الأولى لمتتالية (u_n) حسابية أساسها $r = 6 - 24 = -18$ وحدها الأول $u_1 = 24$

ولدينا $u_1 + u_2 + \dots + u_6 = \frac{6}{2}(u_1 + u_6) = 3(2u_1 + 5r)$

$u_1 + u_2 + \dots + u_6 = 3(48 - 90) = -126$

* لدينا 6 و -12 و 24 هي الحدود الثلاثة الأولى لمتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{-12}{6} = -2$ وحدها الأول $v_1 = 6$

ولدينا $v_1 + v_2 + \dots + v_6 = v_1 \times \frac{1-(-2)^6}{1+2} = 6 \times \frac{-63}{3} = -126$

47

لتكن (u_n) متتالية هندسية حدودها سالبة قطعًا.

ليكن q أساس المتتالية (u_n) .

1) حدد إشارة الحد q .

2) احسب u_0 و u_1 إذا علمت أن :

$$\begin{cases} u_0 + u_1 = -10 \\ u_0 \times u_1 = 16 \end{cases}$$

ثم عبر عن u_n بدلالة n .

الجواب 1) تحديد إشارة q

بما أن لكل n من $\mathbb{N}$ $u_{n+1} = q u_n$ و $u_n > 0$

فإن $q > 0$.

2) أ- تحديد u_0 و u_1 .

بما أن $\begin{cases} u_0 + u_1 = -10 \\ u_0 \times u_1 = 16 \end{cases}$ فإن u_0 و u_1 هما حلي المعادلة :

$X^2 + 10X + 16 = 0$

حلي هذه المعادلة هما: $X_1 = -2$ و $X_2 = -8$

هناك حالتان : الحالة الأولى: إذا كان $u_0=-2$ و $u_1=-8$

فإن (u_n) متتالية هندسية أساسها $q=4$ وحدها الأول $u_0=-2$ ومنه $u_n=u_0.q^n=-2(4)^n$ $\forall n\in\mathbb{N}$

الحالة الثانية : إذا كان $u_0=-8$ و $u_1=-2$

فإن (u_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{4}$ وحدها الأول $u_0=-8$ ومنه $u_n=u_0.q^n=-8.(\frac{1}{4})^n$ $\forall n\in\mathbb{N}$

48 نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بمايلي :

$$\begin{cases} u_0=\frac{1}{2} \\ u_{n+1}=\frac{9u_n}{4u_n+3} \end{cases}, n\in\mathbb{N}$$

1) احسب u_1 و u_2 .

2) بين أن لكل n من $\mathbb{N}$ $u_n\neq 0$.

3) نضع $v_n=2-\frac{3}{u_n}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

أ- بين أن المتتالية (u_n) هندسية محددًا أساسها وحدها الأول.

ب- حدد v_n ثم u_n بدلالة n .

ج- احسب المجموع $v_1+v_2+....+v_n$

د- ادرس رتابة المتتالية (v_n) .

الجواب 1) لدينا $u_1=\frac{9u_0}{4u_0+3}=\frac{9/2}{2+3}=\frac{9}{10}$

$$u_2=\frac{9u_1}{4u_1+3}=\frac{\frac{81}{10}}{\frac{36}{10}+3}=\frac{81}{66}=\frac{27}{22}$$

2) لنبين بالترجع أن $u_n\neq 0$ $\forall n\in\mathbb{N}$

- من أجل $n=0$ لدينا $u_0=\frac{1}{2}$ إذن $u_0\neq 0$

- نفترض أن $u_n\neq 0$ ولنبين أن $u_{n+1}\neq 0$

بما أن $u_n\neq 0$ فإن $\frac{9u_n}{4u_n+3}$ أي $u_{n+1}\neq 0$

وبالتالي $u_n\neq 0$ $\forall n\in\mathbb{N}$

3) أ- لنبين أن (v_n) متتالية هندسية.

ليكن n من $\mathbb{N}$ لدينا $v_n=2-\frac{3}{u_n}$

$$v_{n+1}=2-\frac{3}{u_{n+1}}=2-\frac{3}{\frac{9u_n}{4u_n+3}}=2-\frac{4u_n+3}{3u_n}$$

$$v_{n+1}=\frac{6u_n-4u_n-3}{3u_n}=\frac{1}{3}\left(2-\frac{3}{u_n}\right)$$

إذن $v_{n+1}=\frac{1}{3}v_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{3}$ وحدها الأول $v_0=2-\frac{3}{u_0}=-4$.

ب- لدينا $v_n=v_0\times q^n$ $\forall n\in\mathbb{N}$

$v_n=-4(\frac{1}{3})^n$ $\forall n\in\mathbb{N}$

ولدينا $v_n=2-\frac{3}{u_n} \Longleftrightarrow \frac{3}{u_n}=2-v_n$

$\Longleftrightarrow u_n=\frac{3}{2-v_n}$

ومنه $u_n=\frac{3}{2+4(\frac{1}{3})^n}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

ج- لدينا $v_1+v_2+---+v_n=v_1\times\frac{1-q^n}{1-q}$

$$v_1+v_2+.....+v_n=\frac{1}{6}\times\frac{1-(\frac{1}{3})^n}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{4}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

د- رتابة المتتالية (v_n)

ليكن n من $\mathbb{N}$ لدينا $v_{n+1}-v_n=qv_n-v_n$

$$v_{n+1}-v_n=v_n(q-1)=-4\left(\frac{1}{3}\right)^n\left(\frac{1}{3}-1\right)=\frac{8}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n>0$$

ومنه (v_n) متتالية تزايدية قطعًا .

49

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بمايلي :

$$\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=\dfrac{u_n-4}{u_n+6} \end{cases},\ n\in\mathbb{N}$$

نضع $\forall n\in\mathbb{N}\quad v_n=\dfrac{1+u_n}{4+u_n}$

1) أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية محدداً أساسها وحدها الأول

ب- حدد v_n ثم u_n بدلالة n .

2) حدد المجموع $v_0+v_1+\dots\dots+v_n$ بدلالة n .

الجواب

1) أ- لنبين أن (v_n) متتالية هندسية .

ليكن n من $\mathbb{N}$ لدينا

$$v_n=\frac{1+u_n}{4+u_n}$$

$$v_{n+1}=\frac{1+u_{n+1}}{4+u_{n+1}}=\frac{1+\frac{u_n-4}{u_n+6}}{4+\frac{u_n-4}{u_n+6}}=\frac{u_n+6+u_n-4}{4u_n+24+u_n-4}$$

$$v_{n+1}=\frac{2u_n+2}{5u_n+20}=\frac{2}{5}\times\frac{1+u_n}{4+u_n}$$

إذن $\forall n\in\mathbb{N}\quad v_{n+1}=\frac{2}{5}v_n$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{2}{5}$ وحدها الأول

$$v_0=\frac{1+u_0}{4+u_0}=\frac{1}{4}$$

ب- لدينا $\forall n\in\mathbb{N}\quad v_n=v_0\times q^n$

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad v_n=\frac{1}{4}\times\left(\frac{2}{5}\right)^n$$

ولدينا

$$v_n=\frac{1+u_n}{4+u_n}\iff 4v_n+v_nu_n=1+u_n$$

$$\iff u_n(v_n-1)=1-4v_n$$

$$\iff u_n=\frac{1-4v_n}{-1+v_n}$$

ومنه $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=\dfrac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{-1+\frac{1}{4}\left(\frac{2}{5}\right)^n}$

2) لدينا

$$v_0+v_1+\dots+v_n=v_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$v_0+v_1+\dots+v_n=\frac{1}{4}\times\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{5}}=$$

ومنه $v_0+v_1+\dots+v_n=\dfrac{5}{12}\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right)$

50

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بمايلي :

$$\begin{cases} u_0=2 \ \text{و}\ u_1=3 \\ u_{n+2}=\frac{1}{3}(4u_{n+1}-u_n) \end{cases},\ n\in\mathbb{N}$$

1) احسب u_2 و u_3 .

2) نضع $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad v_n=u_n-u_{n-1}$

أ- احسب v_1 و v_2 .

ب- بين أن (v_n) متتالية هندسية محدداً أساسها .

ج- احسب v_n بدلالة n .

3) أ- احسب المجموع $S_n=v_1+v_2+\dots+v_n$ بدلالة n .

ب- استنتج u_n بدلالة n .

الجواب

1) لدينا

$$u_2=\frac{1}{3}(4u_1-u_0)=\frac{1}{3}(12-2)=\frac{10}{3}$$

$$u_3=\frac{1}{3}(4u_2-u_1)=\frac{1}{3}\left(\frac{40}{3}-3\right)=\frac{31}{9}$$

2) أ- لدينا

$$v_1=u_1-u_0=1$$

$$v_2=u_2-u_1=\frac{10}{3}-3=\frac{1}{3}$$

ب- لنبين أن (v_n) متتالية هندسية .

ليكن n من $\mathbb{N}^*$ لدينا

$$v_n=u_n-u_{n-1}$$

$v_{n+1} = u_{n+1} - u_n$

$v_{n+1} = \frac{1}{3}(4u_n - u_{n-1}) - u_n = \frac{1}{3}(4u_n - u_{n-1} - 3u_n)$

$v_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n - u_{n-1})$

إذن $\forall n\in\mathbb{N} \quad v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$

ومنه $(v_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{3}$ وحدها الأول $v_1 = 1$.

ج ـ لدينا $\forall n\in\mathbb{N}^* \quad v_n = v_1 \times q^{(n-1)}$

$\forall n\in\mathbb{N}^* \quad v_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

3) أ ـ لدينا $S_n = v_1+v_2+\dots+v_n = v_1\times\frac{1-q^n}{1-q}$

$= \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}$

ومنه $\forall n\in\mathbb{N}^* \quad S_n = \frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$

ب ـ تحديد u_n بدلالة n .

لدينا $S_n = v_1+v_2+\dots+v_{n-1}+v_n$

$S_n = (u_1-u_0)+(u_2-u_1)+\dots+(u_{n-1}-u_{n-2})+(u_n-u_{n-1})$

$S_n = u_n - u_0$

إذن $u_n = u_0 + S_n$

ومنه $u_n = 2 + \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$

أي $\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n = \frac{7}{2} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$

51 نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بمايلي:

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{3-u_n}, \quad n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

1) بين أن $0 < u_n < 2 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

2) ليكن a عددا حقيقيا. لكل n من $\mathbb{N}$ نضع $v_n = 1+\frac{a}{u_n}$

حدد قيمة a التي من أجلها تكون المتتالية (v_n) هندسية.

3) نأخذ $a=-2$.

أ ـ احسب v_n ثم المجموع $S_n = v_3+v_4+\dots+v_n$ بدلالة n .

ب ـ اكتب u_n بدلالة n .

الجواب

1) لنبين بالترجع أن $0<u_n<2 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

ـ من أجل $n=0$ لدينا $u_0=\frac{1}{2}$ إذن $0<u_0<2$

ـ نفترض أن $0<u_n<2$ ولنبين أن $0<u_{n+1}<2$

لدينا $0<u_n<2$ أي $1<3-u_n<3$

إذن $0<u_n<2$ و $\frac{1}{3}<\frac{1}{3-u_n}<1$

ومنه $0<\frac{u_n}{3-u_n}<2$ أي $0<u_{n+1}<2$

وبالتالي $\forall n\in\mathbb{N} \quad 0<u_n<2$

2) لنحدد قيمة العدد a لكي تكون (v_n) متتالية هندسية.

ليكن n من $\mathbb{N}$ لدينا $v_n = 1+\frac{a}{u_n}$

$v_{n+1} = 1+\frac{a}{u_{n+1}} = 1+\frac{a}{\frac{u_n}{3-u_n}} = 1+\frac{a(3-u_n)}{u_n}$

$v_{n+1} = 1-a+3\frac{a}{u_n} = 1+a+3(v_n-1)$ لأن $\left(\frac{a}{u_n}=v_n-1\right)$

$v_{n+1} = -a-2+3v_n$

لكي تكون (v_n) هندسية أي $v_{n+1}=qv_n$ يجب أن يكون $-a-2=0$

وبالتالي تكون (v_n) هندسية إذا كان $a=-2$.

ج) إذا كانت $a=-2$ فإن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=3$

وحدها الأول $v_0 = 1 - \frac{2}{u_0} = -3$

لدينا $\forall n\in\mathbb{N} \quad v_n = v_0\times q^n$

$\forall n\in\mathbb{N} \quad v_n = -3\times 3^n = -3^{n+1}$

ولدينا $S_n = v_3+v_4+\dots+v_n = v_3\times\frac{1-q^{n-2}}{1-q}$

$= -81\times\frac{1-3^{n-2}}{-2}$

ومنه $S_n=\frac{81}{2}(1-3^{n-2})$

ب- لدينا $v_n = 1-\frac{2}{u_n} \iff \frac{2}{u_n} = 1-v_n$

$\iff u_n = \frac{2}{1-v_n}$

ومنه $\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n=\frac{2}{1+3^{n+1}}$

52

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بمايلي :

$$\begin{cases} u_0=\frac{\sqrt[3]{2}}{2} \\ u_{n+1}=\sqrt[3]{\frac{1-u_n^3}{7}} \quad , n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

نضع $\forall n\in\mathbb{N} \quad v_n = 8u_n^3-1$

1) أ- بين بالترجع أنه لكل n من $\mathbb{N}$ $0<u_n<1$.

ب- استنتج أنه لكل n من $\mathbb{N}$ $-1<v_n<7$.

2) أ- احسب v_0 .

ب- بين أن (v_n) متتالية هندسية محدداً أساسها.

3) أ- احسب v_n بدلالة n .

ب- استنتج u_n بدلالة n .

الجواب 1) أ- لنبين بالترجع أن $\forall n\in\mathbb{N} \quad 0<u_n<1$

- من أجل $n=0$ لدينا $u_0=\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$ إذن $0<u_0<1$

- نفترض أن $0<u_n<1$ ولنبين أن $0<u_{n+1}<1$

لدينا $0<u_n<1$ إذن $0<u_n^3<1$ و $-1<-u_n^3<0$

إذن $0<\frac{1-u^3}{7}<\frac{1}{7}$ ومنه $0<\sqrt[3]{\frac{1-u^3}{7}}<\sqrt[3]{\frac{1}{7}}<1$

إذن $0<u_{n+1}<1$

وبالتالي $\forall n\in\mathbb{N} \quad 0<u_n<1$

ب- لنستنتج أن $\forall n\in\mathbb{N} \quad -1<v_n<7$

بما أن لكل n من $\mathbb{N}$ $0<u_n<1$ فإن $0<u_n^3<1$

إذن $-1<8u^3-1<8-1$

ومنه $\forall n\in\mathbb{N} \quad -1<v_n<7$

2) أ- لدينا $v_0=8u_0^3-1=8\left(\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\right)^3-1=1$

ب- لنبين أن (v_n) متتالية هندسية.

ليكن n من $\mathbb{N}$ لدينا

$v_n=8u_n^3-1$

$v_{n+1}=8u_{n+1}^3-1=8\left(\frac{1-u_n^3}{7}\right)-1$

$v_{n+1}=\frac{1}{7}(1-8u_n^3)=-\frac{1}{7}(8u_n^3-1)$

إذن $\forall n\in\mathbb{N} \quad v_{n+1}=-\frac{1}{7}v_n$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=-\frac{1}{7}$ وحدها الأول $v_0=1$.

3) أ- لدينا

$\forall n\in\mathbb{N} \quad v_n=v_0\times q^n$

$\forall n\in\mathbb{N} \quad v_n=\left(-\frac{1}{7}\right)^n$

ب- لدينا $v_n=8u_n^3-1 \iff u_n^3=\frac{v_n+1}{8}$

$\iff u_n=\sqrt[3]{\frac{v_n+1}{8}}$

ومنه $\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n=\frac{1}{2}\sqrt[3]{\left(-\frac{1}{7}\right)^n+1}$

53

لتكن (u_n) المتتالية العددية التي تحقق مايلي :

$$P_n = u_0\times u_1\times\dots\times u_n = \frac{1}{3^{(n^2+n)}} \quad \text{و} \quad u_0=1$$

1) احسب u_1 و u_2 و u_3.

2) بين أن المتتالية (u_n) هندسية .

الجواب 1) لدينا $P_1 = u_0\times u_1 = \frac{1}{3^{(1+1)}} = \frac{1}{3^2}$

ومنه $u_1 = \frac{P_1}{u_0} = \frac{1}{9}$.

لدينا $P_2 = u_0\times u_1\times u_2 = \frac{1}{3^{(4+2)}} = \frac{1}{3^6}$

$P_2 = P_1\times u_2$

ومنه $u_2 = \frac{P_2}{P_1} = \frac{\frac{1}{3^6}}{\frac{1}{3^2}} = \frac{1}{3^6}\times 3^2 = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$

لدينا $P_3 = u_0\times u_1\times u_2 = \frac{1}{3^{(9+3)}} = \frac{1}{3^{12}}$

$P_3 = P_2\times u_3$

ومنه $u_3 = \frac{P_3}{P_2} = \frac{\frac{1}{3^{12}}}{\frac{1}{3^6}} = \frac{1}{3^{12}}\times 3^6 = \frac{1}{3^6} = \frac{1}{729}$

2) ليكن n من $\mathbb{N}^*$ لدينا $P_n = u_0\times u_1\times\dots\times u_n = \frac{1}{3^{(n^2+n)}}$

$P_{n-1} = u_0\times u_1\times\dots\times u_{n-1} = \frac{1}{3^{((n-1)^2+(n-1))}} = \frac{1}{3^{(n^2-n)}}$

إذن $\frac{P_n}{P_{n-1}} = \frac{u_0\times u_1\times\dots\times u_n}{u_0\times u_1\times\dots\times u_{n-1}} = \frac{1}{3^{(n^2+n)}}\times 3^{(n^2-n)}$

ومنه $\forall n\in\mathbb{N}$ $\quad u_n = \frac{1}{3^{2n}} = \left(\frac{1}{3^2}\right)^n = \left(\frac{1}{9}\right)^n$

$u_{n+1} = \left(\frac{1}{9}\right)^{n+1} = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{9}\right)^n$

إذن $\forall n\in\mathbb{N}$ $\quad u_{n+1} = \frac{1}{9}u_n$

ومنه (u_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{9}$

54

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بمايلي :

$$\begin{cases} u_0=2 \quad \text{و} \quad u_1=\frac{4}{9} \\ u_{n+2} = \frac{4}{9}u_{n+1} - \frac{1}{27}u_n \quad , n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

نضع $\quad v_n = u_n - \frac{1}{3^n} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

1) احسب u_2 و u_3 و v_0 و v_1.

2) أ- بين بالترجع أن $\forall n\in\mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3^{n+2}}$

ب- بين أن المتتالية (v_n) هندسية محددا أساسها.

3) حدد u_n بدلالة n .

الجواب 1) لدينا $u_2 = \frac{4}{9}u_1 - \frac{1}{27}u_0 = \frac{16}{81} - \frac{6}{81} = \frac{10}{81}$

$u_3 = \frac{4}{9}u_2 - \frac{1}{27}u_1 = \frac{40}{729} - \frac{12}{729} = \frac{28}{729}$

$v_0 = u_0 - \frac{1}{3^0} = 2 - 1 = 1$

$v_1 = u_1 - \frac{1}{3^1} = \frac{4}{9} - \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

2) أ- لنبين بالترجع أن $\forall n\in\mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3^{n+2}}$

- من أجل $n=0$ لدينا $\frac{1}{9}u_0 + \frac{2}{3^{0+2}} = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$ و $u_1 = \frac{4}{9}$

إذن $u_1 = \frac{1}{9}u_0 + \frac{2}{3^{0+2}}$

- نفترض أن $u_{n+1} = \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3^{n+2}}$ ولنبين أن $u_{n+2} = \frac{1}{9}u_{n+1} + \frac{2}{3^{n+3}}$

لدينا $u_{n+2} = \frac{4}{9}u_{n+1} - \frac{1}{27}u_n = \frac{4}{9}u_{n+1} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{9}u_n\right)$

بما أن $u_{n+1} = \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3^{n+2}}$ فإن $\frac{1}{9}u_n = u_{n+1} - \frac{2}{3^{n+2}}$

إذن $u_{n+2} = \frac{4}{9}u_{n+1} - \frac{1}{3}\left(u_{n+1} - \frac{2}{3^{n+2}}\right)$

$u_{n+2} = \frac{4}{9}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3.3^{n+2}}$

ومنه $u_{n+2} = \frac{1}{9}u_{n+1} + \frac{2}{3^{n+3}}$

وبالتالي $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3^{n+2}}$

ب ـ لنبين أن (v_n) متتالية هندسية.

ليكن n من $\mathbb{N}$ لدينا $v_n = u_n - \frac{1}{3^n}$

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{3^{n+1}} = \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3^{n+2}} - \frac{1}{3^{n+1}}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3^{n+2}} - \frac{3}{3^{n+2}} = \frac{1}{9}u_n - \frac{1}{3^{n+2}}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{9}\left(u_n - \frac{1}{3^n}\right)$$

إذن $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = \frac{1}{9}v_n$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{9}$ وحدها الأول $v_0 = 1$.

3) لدينا $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = v_0 \times q^n$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \left(\frac{1}{9}\right)^n = \frac{1}{9^n}$

ولدينا $v_n = u_n - \frac{1}{3^n} \Leftrightarrow u_n = v_n + \frac{1}{3^n}$

ومنه $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{1}{9^n} + \frac{1}{3^n}$

55 لتكن (a_n) و(b_n) المتتاليتين العدديتين المعرفتين كما يلي:

$$\begin{cases} a_0 = -3 \text{ و } b_0 = 0 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n - 2 \\ b_{n+1} = b_n - \frac{1}{2}a_n \quad , n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) احسب a_1 و b_1 و a_2 و b_2 .

2) بين أن لكل n من $\mathbb{N}$ $a_n \geq -4$ وأن (a_n) تناقصية.

3) نضع لكل n من $\mathbb{N}$ $\begin{cases} u_n = a_n + 4 \\ v_n = b_n - a_n \end{cases}$

أ ـ بين أن (u_n) متتالية هندسية واحسب u_n بدلالة n .

ب ـ بين أن (v_n) متتالية حسابية واحسب v_n بدلالة n .

ج ـ استنتج a_n و b_n بدلالة n .

د ـ بين أن $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad b_n > n$

الجواب

1) لدينا $a_1 = \frac{1}{2}a_0 - 2 = -\frac{3}{2} - 2 = -\frac{7}{2}$

$b_1 = b_0 - \frac{1}{2}a_0 = 0 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

$a_2 = \frac{1}{2}a_1 - 2 = -\frac{7}{4} - 2 = -\frac{15}{4}$

$b_2 = b_1 - \frac{1}{2}a_1 = \frac{3}{2} + \frac{7}{4} = \frac{13}{4}$

2) لنبين بالترجع أن $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \geq -4$

ـ من أجل n=0 لدينا $a_0 = -3$ إذن $a_0 \geq -4$

ـ نفترض أن $a_n \geq -4$ ولنبين أن $a_{n+1} \geq -4$

لدينا $a_{n+1} + 4 = \frac{1}{2}a_n - 2 + 4 = \frac{1}{2}(a_n + 4)$

بما أن $a_n \geq -4$ أي $\frac{1}{2}(a_n + 4) \geq 0$

فإن $a_{n+1} + 4 \geq 0$ أي $a_{n+1} \geq -4$

وبالتالي $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \geq -4$

• لنبين أن (a_n) متتالية تناقصية.

ليكن n من $\mathbb{N}$ لدينا $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}a_n - 2 - a_n$

$a_{n+1} - a_n = -\frac{1}{2}a_n - 2 = -\frac{1}{2}(a_n + 4)$

بما أن $a_n + 4 \geq 0$ فإن $a_{n+1} - a_n \leq 0$

ومنه (a_n) متتالية تناقصية.

3) أ ـ لنبين أن (u_n) متتالية هندسية.

ليكن n من $\mathbb{N}$ لدينا $u_{n+1} = a_{n+1} + 4$

$u_{n+1} = \frac{1}{2}a_n - 2 + 4 = \frac{1}{2}a_n + 2 = \frac{1}{2}(a_n + 4)$

إذن $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n$ ومنه (u_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول $u_0 = a_0 + 4 = 1$

ومنه $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=u_0\times q^n$

$\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{2^n}$

ب ـ لنبين أن (v_n) متتالية حسابية .

ليكن n من $\mathbb{N}$ لدينا $v_{n+1}-v_n=b_{n+1}-a_{n+1}-b_n+a_n$

$v_{n-1}-v_n=b_n-\frac{1}{2}a_n-\frac{1}{2}a_n+2-b_n-a_n=2$

إذن (v_n) متتالية حسابية أساسها $r=2$ وحدها الأول $v_0=3$

ومنه $\forall n\in\mathbb{N}\quad v_n=v_0+nr$

$\forall n\in\mathbb{N}\quad v_n=3+2n$

ج ـ ليكن n من $\mathbb{N}$ لدينا

$$\begin{cases} u_n=a_n+4 \\ v_n=b_n-a_n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_n=u_n-4 \\ b_n=v_n+a_n=v_n+u_n-4 \end{cases}$$

$a_n=\frac{1}{2^n}$ و $b_n=2n+\frac{1}{2^n}-1$

د ـ لنبين أن $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad b_n>n$

ليكن n من $\mathbb{N}^*$ لدينا $n\geq 1$ و $\frac{1}{2^n}>0$

إذن $\frac{1}{2^n}+n-1>0$

أي $n+\frac{1}{2^n}+n-1>n$

أي $2n+\frac{1}{2^n}-1>n$

ومنه $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad b>n$

تذكير

رتابة متتالية هندسية (u_n)	الأساس q	الحد الأول u_0
(u_n) تناقصية	$0<q<1$	$u_0>0$
(u_n) تزايدية	$q>1$	$u_0>0$
(u_n) تزايدية	$0<q<1$	$u_0<0$
(u_n) تناقصية	$q>1$	$u_0<0$

نهاية متتالية عددية

نهاية المتتاليات الاعتيادية

- متتاليات تؤول إلى 0 .

$\lim_{n\to+\infty}\frac{k}{n}=0$ ؛ $\lim_{n\to+\infty}\frac{k}{n^2}=0$ ؛ $\lim_{n\to+\infty}\frac{k}{n^p}=0$ $(p\in\mathbb{N}^*)$

$\lim_{n\to+\infty}\frac{k}{\sqrt{n}}=0$ ؛ $\lim_{n\to+\infty}k\,a^n=0$ $(-1<a<1)$

- متتاليات تؤول إلى $+\infty$.

$\lim_{n\to+\infty}n=+\infty$ ؛ $\lim_{n\to+\infty}n^2=+\infty$ ؛ $\lim_{n\to+\infty}n^p=+\infty$ $(p\in\mathbb{N}^*)$

$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}=+\infty$ ؛ $\lim_{n\to+\infty}a^n=+\infty$ $(a>1)$

- (u_n) متتالية متقاربة $\Leftrightarrow$ $(\exists l\in\mathbb{R})\ \lim_{n\to+\infty}u_n=l$
- (u_n) متتالية متباعدة $\Leftrightarrow$ (u_n) متتالية غير متقاربة .

هناك ثلاث أنواع من المتتاليات المتباعدة .

(u_n) متتالية متباعدة:
- $\lim_{n\to+\infty}u_n=+\infty$ $(u_n=n^2)$
- $\lim_{n\to+\infty}u_n=-\infty$ $(u_n=-n^2)$
- لا تقبل نهاية $(u_n=(-1)^n)$

- $\lim_{n\to+\infty}u_n=-\infty \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty}(-u_n)=+\infty$

$\lim_{n\to+\infty}u_n=l \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty}(u_n-l)=0$

العمليات على النهايات

$\lim u_n$	$\lim v_n$	$\lim (u_n v_n)$
$\ell \neq 0$	∞	∞
∞	∞	∞
0	∞	شكل غير محدد
ℓ	ℓ'	$\ell\ell'$

$\lim u_n$	$\lim v_n$	$\lim (u_n + v_n)$
ℓ	∞	∞
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	شكل غير محدد
ℓ	ℓ'	$\ell+\ell'$

$\lim u_n = +\infty$	$\lim \frac{1}{u_n} = 0$
$\lim u_n = -\infty$	$\lim \frac{1}{u_n} = 0$
$\lim u_n = 0$	$\lim \frac{1}{\lvert u_n \rvert} = \infty$

$\lim u_n$	$\lim v_n$	$\lim \frac{u_n}{v_n}$
ℓ	∞	0
∞	ℓ	∞
∞	∞	شكل غير محدد
0	0	شكل غير محدد
$\ell \neq 0$	0	∞
ℓ	$\ell' \neq 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$

56

حدد نهاية المتتالية (u_n) في كل من الحالات التالية :

1) $u_n = \frac{n\sqrt{n+1}+1}{n+1}$

2) $u_n = \sqrt{\frac{n^2+1}{n+3}}$

3) $u_n = \frac{-n^3+4n^2}{3n^2-5n}$

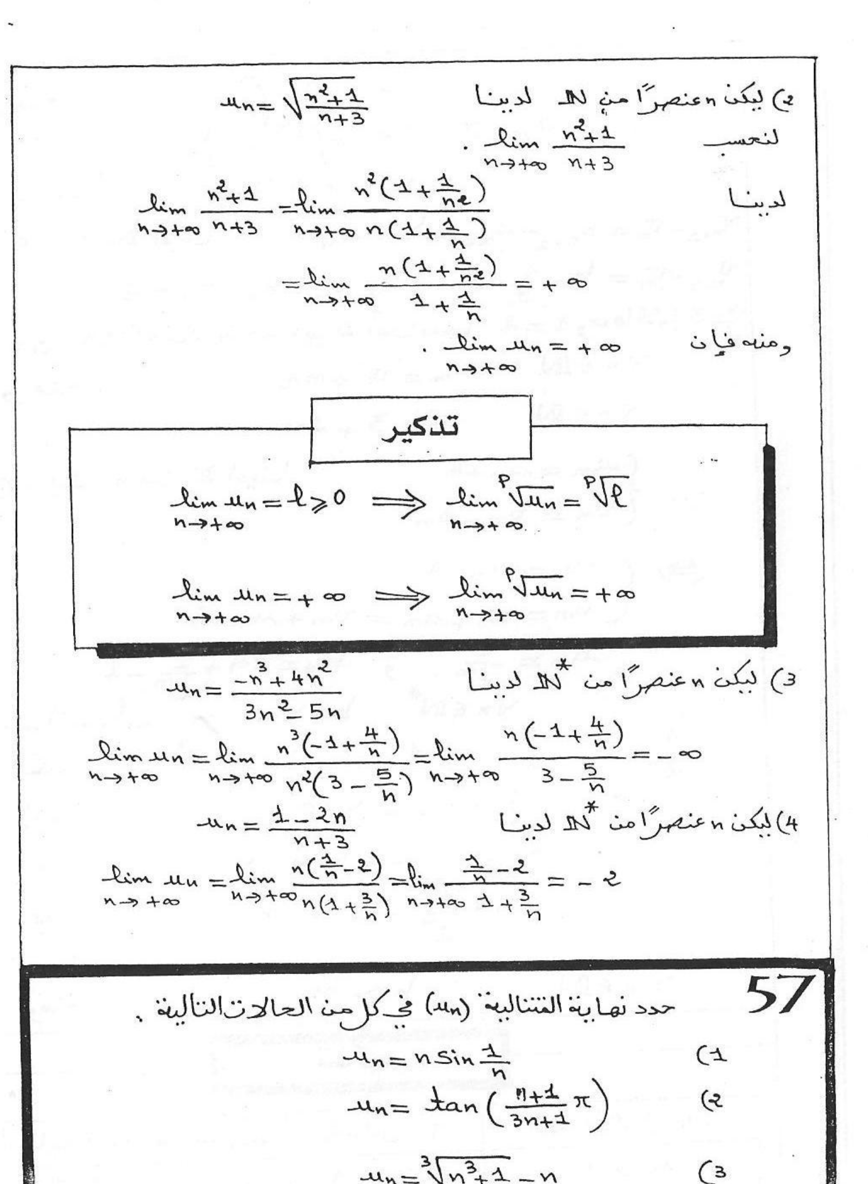
4) $u_n = \frac{1-2n}{n+3}$

الجواب 1) ليكن n عنصراً من $\mathbb{N}^*$ لدينا :

$$u_n = \frac{n\sqrt{n+1}+1}{n+1} = \frac{n\sqrt{n+1}}{n+1} + \frac{1}{n+1}$$

$$u_n = \frac{n}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{n(1+\frac{1}{n})} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}} + \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}$$

ومنه فإن $\lim u_n = 0$



2) ليكن n عنصراً من $\mathbb{N}$ لدينا $u_n = \sqrt{\frac{n^2+1}{n+3}}$

لنحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{n+3}$.

لدينا
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{n+3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2(1+\frac{1}{n^2})}{n(1+\frac{1}{n})} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n(1+\frac{1}{n^2})}{1+\frac{1}{n}} = +\infty$$

ومنه فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

تذكير

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \geq 0 \implies \lim_{n\to+\infty} \sqrt[p]{u_n} = \sqrt[p]{\ell}$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \implies \lim_{n\to+\infty} \sqrt[p]{u_n} = +\infty$$

3) ليكن n عنصراً من $\mathbb{N}^*$ لدينا $u_n = \frac{-n^3+4n^2}{3n^2-5n}$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3(-1+\frac{4}{n})}{n^2(3-\frac{5}{n})} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n(-1+\frac{4}{n})}{3-\frac{5}{n}} = -\infty$$

4) ليكن n عنصراً من $\mathbb{N}^*$ لدينا $u_n = \frac{1-2n}{n+3}$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n(\frac{1}{n}-2)}{n(1+\frac{3}{n})} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}-2}{1+\frac{3}{n}} = -2$$

57

حدد نهاية المتتالية (u_n) في كل من الحالات التالية .

1) $u_n = n\sin\frac{1}{n}$

2) $u_n = \tan\left(\frac{n+1}{3n+1}\pi\right)$

3) $u_n = \sqrt[3]{n^3+1} - n$

الجواب: 1) لدينا $u_n = n\sin\frac{1}{n}$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$

نضع: $t=\frac{1}{h}$ إذن $n=\frac{1}{t}$ $(n\to+\infty \Leftrightarrow t\to 0^+)$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{t\to0^+}\frac{\sin t}{t}=1$$

2) لدينا $u_n=\tan\left(\frac{n+1}{3n+1}\pi\right)$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

نضع: $v_n=\frac{n+1}{3n+1}\pi$ و $f(x)=\tan x$

تذكير

إذا كانت $\lim_{n\to+\infty} v_n = l$ و f دالة متصلة في l

فإن المتتالية: $(u_n)=(f(v_n))$ متقاربة و $\lim_{n\to+\infty} u_n = f(l)$.

لدينا $\lim_{n\to+\infty} v_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{3+\frac{1}{n}}\pi=\frac{\pi}{3}$ و f متصلة في $\frac{\pi}{3}$

إذن $\lim_{n\to+\infty} u_n = f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\tan\frac{\pi}{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

3) لدينا $u_n=\sqrt[3]{n^3+1}-n=\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt[3]{n^3}$ $(n\in\mathbb{N}^*)$

$$u_n=\frac{n^3+1-n^3}{\left(\sqrt[3]{n^3+1}\right)^2+n\sqrt[3]{n^3+1}+n^2}=\frac{1}{n^2\left[\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^3}}\right)^2+\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^3}}+1\right]}$$

ومنه فإن $\lim_{n\to+\infty} u_n=0$

58 نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بمايلي:

$$u_n=\frac{3^n-2^n}{3^n+2^n}$$

1) بين أنه لكل n من $\mathbb{N}$: $u_n=\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}$

2) استنتج نهاية المتتالية (u_n).

إذا كان $-1<a<1$ فإن $\lim_{n\to+\infty} a^n=0$



الجواب 1) ليكن n من $\mathbb{N}$ لدينا $u_n=\frac{3^n-2^n}{3^n+2^n}$

$$u_n=\frac{3^n\left(\frac{3^n}{3^n}-\frac{2^n}{3^n}\right)}{3^n\left(\frac{3^n}{3^n}+\frac{2^n}{3^n}\right)}=\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

2) بما أن $\left|\frac{2}{3}\right|<1$ فإن $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$

ومنه $\lim_{n\to+\infty} u_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}=1$

59 حدد نهاية المتتالية (u_n) في كل من الحالات التالية:

1) $u_n=\frac{5^n}{4^{n+2}}$

2) $u_n=7^{-n}$

3) $u_n=\frac{-3}{2^n+4}$

الجواب 1) لدينا $u_n=\frac{5^n}{4^{n+2}}=\frac{1}{4^2}\times\frac{5^n}{4^n}$

$$u_n=\frac{1}{16}\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^n$$

بما أن $\frac{5}{4}>1$ فإن $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{4}\right)^n=+\infty$

ومنه $\lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty$

2) لدينا $u_n=7^{-n}=\frac{1}{7^n}=\left(\frac{1}{7}\right)^n$

بما أن $\left|\frac{1}{7}\right|<1$ فإن $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{7}\right)^n=0$

ومنه $\lim_{n\to+\infty} u_n=0$

3) لدينا $u_n=\frac{-3}{2^n+4}$

بما أن $2>1$ فإن $\lim_{n\to+\infty} 2^n=+\infty$ إذن $\lim_{n\to+\infty} 2^n+4=+\infty$ و منه $\lim_{n\to+\infty} u_n=0$

60

حدد نهاية المتتالية (u_n) في كل من الحالات التالية ،

1) $u_n=\cos(n)-3^n$

2) $u_n=2^n+(-1)^n$

3) $u_n=n^2-\sin(n)$

الجواب

مصاديق تقارب متتالية

مصداق ① $\begin{cases}(\forall n\geq n_0)\quad u_n\leq v_n\\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty\end{cases}\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty$

مصداق ② $\begin{cases}(\forall n\geq n_0)\quad u_n\leq v_n\\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n=-\infty\end{cases}\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$

مصداق ③ $\begin{cases}(\forall n\geq n_0)\quad v_n\leq u_n\leq w_n\\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\lim\limits_{n\to+\infty} w_n=l\end{cases}\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n=l$

مصداق ④ $\begin{cases}(\forall n\geq n_0)\quad |u_n-l|\leq v_n\\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n=0\end{cases}\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n=l$

النهاية والترتيب :

$\begin{cases}(\forall n\geq n_0)\quad u_n\leq v_n\\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n=l \text{ و } \lim\limits_{n\to+\infty} v_n=l'\end{cases}\Rightarrow l\leq l'$

1) لدينا $u_n=\cos(n)-3^n$ $(n\in\mathbb{N})$

ولدينا $\cos(n)\leq 1$ إذن $u_n=\cos(n)-3^n\leq 1-3^n$

نضع : $v_n=1-3^n$ إذن $u_n\leq v_n$. $(\forall n\in\mathbb{N})$

وبما أن $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=-\infty$ فحسب المصداق ② فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$

2) ليكن n من $\mathbb{N}$ لدينا $u_n=2^n+(-1)^n$

ولدينا $-1\leq(-1)^n$ إذن $-1+2^n\leq(-1)^n+2^n=u_n$

نضع $v_n=-1+2^n$ إذن $\begin{cases}v_n\leq u_n\\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty\end{cases}$

فحسب المصداق ① لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$

3) ليكن n من $\mathbb{N}$ لدينا $u_n=n^2-\sin(n)$

ولدينا $-1\leq-\sin(n)$ إذن $n^2-1\leq n^2-\sin(n)=u_n$

نضع $v_n=n^2-1$ إذن $\begin{cases}v_n\leq u_n\\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty\end{cases}$

وحسب المصداق ① لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$

61

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بمايلي :

$$\begin{cases}u_0=2 \text{ و } u_1=4\\ u_{n+2}=(1+\sqrt{2})u_{n+1}-\sqrt{2}u_n\ ,\ n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

1) نضع $v_n=u_{n+1}-u_n$ $n\in\mathbb{N}$

بين أن (v_n) متتالية هندسية محددا أساسها .

2) أ- احسب u_n بدلالة n .

ب- حدد نهاية المتتالية (u_n) .

3) نضع $w_n=v_n^2-2v_n\cos(v_n)+1$ $n\in\mathbb{N}$

أ- بين أن $w_n\geq(v_n-1)^2$ $\forall n\in\mathbb{N}$

ب- استنتج نهاية المتتالية (w_n) .

الجواب 1) لنبين أن (v_n) متتالية هندسية .

ليكن n من $\mathbb{N}$ لدينا

$v_{n+1}=u_{n+2}-u_{n+1}$

$v_{n+1}=(1+\sqrt{2})u_{n+1}-\sqrt{2}u_n-u_{n+1}$

$v_{n+1}=\sqrt{2}u_{n+1}-\sqrt{2}u_n=\sqrt{2}(u_{n+1}-u_n)$

إذن $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = \sqrt{2}\, v_n$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\sqrt{2}$ وحدها الأول

$$v_0 = u_1 - u_0 = 4-2 = 2$$

2) أ- حساب u_n بدلالة n.

لدينا $v_n = u_{n+1} - u_n$

إذن
$$\begin{cases} v_0 = u_1 - u_0 \\ v_1 = u_2 - u_1 \\ \text{-----------} \\ v_{n-2} = u_{n-1} - u_{n-2} \\ v_{n-1} = u_n - u_{n-1} \end{cases}$$

بجمع هذه المتساويات طرفا لطرف نحصل على:

$$v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1} = u_n - u_0$$

إذن $u_n = (v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}) + u_0$

بما أن (v_n) متتالية هندسية فإن $v_0+v_1+\cdots+v_{n-1} = v_0 \times \frac{1-q^n}{1-q}$

إذن $v_0+v_1+\cdots+v_{n-1} = 2 \times \frac{1-(\sqrt{2})^n}{1-\sqrt{2}}$

ومنه $u_n = 2 \times \frac{1-(\sqrt{2})^n}{1-\sqrt{2}} + 2$

أي $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2\left(\frac{1-(\sqrt{2})^n}{1-\sqrt{2}} + 1\right)$

ب- تحديد نهاية المتتالية (u_n)

لدينا $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2\left(\frac{1-(\sqrt{2})^n}{1-\sqrt{2}} + 1\right)$

بما أن $\sqrt{2} > 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt{2})^n = +\infty$

و بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-(\sqrt{2})^n = -\infty$ و $1-\sqrt{2} < 0$

فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

3) أ- لنبين أن $w_n \geqslant (v_n - 1)^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

لدينا $w_n = v_n^2 - 2v_n\cos(v_n) + 1$

بما أن $\cos(v_n) \leqslant 1$

و (v_n) متتالية موجبة (لأن $v_n = 2(\sqrt{2})^n$)

فإن $v_n \cos(v_n) \leqslant v_n$

إذن $-2v_n\cos(v_n) \geqslant -2v_n$

ومنه $v_n^2 - 2v_n\cos(v_n) + 1 \geqslant v_n^2 - 2v_n + 1$

أي $v_n^2 - 2v_n\cos(v_n) + 1 \geqslant (v_n - 1)^2$

وبالتالي $\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n \geqslant (v_n - 1)^2$

ب- استنتاج نهاية المتتالية (w_n)

لدينا $\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n \geqslant (v_n - 1)^2$

بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ (لأن $v_n = 2(\sqrt{2})^n$, $\sqrt{2} > 1$)

فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - 1)^2 = +\infty$

فحسب المصداق ① لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty$

62

حدد نهاية المتتالية (u_n) في كل من الحالات الآتية :

1) $u_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n \cos\left(\frac{1}{n}\right)$

2) $u_n = \dfrac{\cos\left(\frac{2n\pi}{5}\right)+n}{n}$

3) $u_n = \dfrac{n(-1)^n}{n^2+1}$

الجواب 1) ليكن n من $\mathbb{N}^*$ لدينا $u_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n \cos\left(\frac{1}{n}\right)$

ولدينا $-1 \leq \cos(n) \leq 1$ إذن $-\left(\frac{2}{5}\right)^n \leq \left(\frac{2}{5}\right)^n \cos(n) \leq \left(\frac{2}{5}\right)^n$

نضع $v_n = -\left(\frac{2}{5}\right)^n$ و $w_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n$

إذن
$$\begin{cases} v_n \leq u_n \leq w_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0 \end{cases}$$
(لأن $\left|\frac{2}{5}\right| < 1$)

فحسب المصداق ④ لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

2) ليكن n من $\mathbb{N}^*$ لدينا $u_n = \dfrac{\cos\left(\frac{2n\pi}{5}\right)+n}{n}$

ولدينا $-1 \leq \cos\left(\frac{2n\pi}{5}\right) \leq 1$ إذن $-1+n \leq \cos\left(\frac{2n\pi}{5}\right)+n \leq 1+n$

إذن $\dfrac{-1+n}{n} \leq \dfrac{\cos\left(\frac{2n\pi}{5}\right)+n}{n} \leq \dfrac{1+n}{n}$

نضع $v_n = \dfrac{-1+n}{n}$ و $w_n = \dfrac{1+n}{n}$

إذن
$$\begin{cases} v_n \leq u_n \leq w_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 1 \end{cases}$$

فحسب المصداق ④ لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

3) ليكن n من $\mathbb{N}^*$ لدينا $u_n = \dfrac{n(-1)^n}{n^2+1}$

لدينا $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ إذن $-n \leq n(-1)^n \leq n$

إذن $\dfrac{-n}{n^2+1} \leq \dfrac{n(-1)^n}{n^2+1} \leq \dfrac{n}{n^2+1}$

نضع $v_n = \dfrac{-n}{n^2+1}$ و $w_n = \dfrac{n}{n^2+1}$

إذن
$$\begin{cases} v_n \leq u_n \leq w_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0 \end{cases}$$

فحسب المصداق ④ لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

63

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بمايلي :
$$u_n = \frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$$

1) بين أن $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$.

2) استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

الجواب 1) لنبين أن $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$

ليكن n من $\mathbb{N}^*$ لدينا $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ إذن $\dfrac{-1}{n} \leq \dfrac{(-1)^n}{n} \leq \dfrac{1}{n}$

بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$

2) لنستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

لدينا
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{(-1)^n}{n}}{1-\frac{(-1)^n}{n}}$$

بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

64

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بمايلي :
$$u_n = \frac{n+\sin(n)}{2n+\cos(n)}$$

نضع $v_n = \dfrac{n-1}{2n+1}$ و $w_n = \dfrac{n+1}{2n+1}$

1) بين أن لكل n من $\mathbb{N}^*$ $v_n \leq u_n \leq w_n$.

2) استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

الجواب 1) ليكن n من $\mathbb{N}^*$ لدينا $u_n = \frac{n+\sin(n)}{2n+\cos(n)}$

نعلم أن $-1 \le \sin(n) \le 1$ و $-1 \le \cos(n) \le 1$

$-1+n \le n+\sin(n) \le 1+n$ و $-1+2n \le 2n+\cos(n) \le 1+2n$

و $-1+n \le n+\sin(n) \le 1+n$ و $\frac{1}{1+2n} \le \frac{1}{2n+\cos(n)} \le \frac{1}{-1+2n}$

بما أن $-1+n \ge 0$ و $\frac{1}{1+2n} > 0$

فإن $\frac{-1+n}{1+2n} \le \frac{n+\sin(n)}{2n+\cos(n)} \le \frac{1+n}{-1+2n}$

أي $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n \le u_n \le w_n$

2) لدينا $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n \le u_n \le w_n$

و $\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n-1}{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$

$\lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2n-1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$

فحسب المصداق ④ لدينا $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$

65

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بمايلي :

$$u_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \dots + \frac{n}{n^2+n}$$

1) احسب u_1 و u_2 .

2) بين أن : $1 \le k \le n \Rightarrow \frac{n}{n^2+n} \le \frac{n}{n^2+k} \le \frac{n}{n^2+1}$

3) نضع $v_n = \frac{n^2}{n^2+n}$ و $w_n = \frac{n^2}{n^2+1}$

أ- بين أن لكل n من $\mathbb{N}^*$ $\quad v_n \le u_n \le w_n$

ب- استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

الجواب 1) لدينا $u_1 = \frac{1}{1^2+1} = \frac{1}{2}$

$u_2 = \frac{2}{2^2+1} + \frac{2}{2^2+2} = \frac{2}{5} + \frac{2}{6} = \frac{11}{15}$

2) لدينا $1 \le k \le n \Rightarrow n^2+1 \le k+n^2 \le n^2+n$

$\Rightarrow \frac{1}{n^2+n} \le \frac{1}{k+n^2} \le \frac{1}{n^2+1}$

$\Rightarrow \frac{n}{n^2+n} \le \frac{n}{n^2+k} \le \frac{n}{n^2+1}$

3) أ- لدينا $1 \le k \le n \quad \frac{n}{n^2+n} \le \frac{n}{n^2+k} \le \frac{n}{n^2+1}$

ومنه

$k=1 \to \quad \frac{n}{n^2+n} \le \frac{n}{n^2+1} \le \frac{n}{n^2+1}$

$k=2 \to \quad \frac{n}{n^2+n} \le \frac{n}{n^2+2} \le \frac{n}{n^2+1}$

$\dots$

$k=n \to \quad \frac{n}{n^2+n} \le \frac{n}{n^2+n} \le \frac{n}{n^2+1}$

بجمع طرف بطرف هذه المتفاوتات نحصل على :

$$\underbrace{\frac{n}{n^2+n} + \frac{n}{n^2+n} + \dots \frac{n}{n^2+n}}_{n \text{ مرة}} \le \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \dots \frac{n}{n^2+n} \le \underbrace{\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+1} + \dots + \frac{n}{n^2+1}}_{n \text{ مرة}}$$

ومنه $\frac{n^2}{n^2+n} \le u_n \le \frac{n^2}{n^2+1}$.

ملاحظة $\forall a \in \mathbb{R} \quad \underbrace{a+a+\dots+a}_{n \text{ مرة}} = na$

وبالتالي $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n \le u_n \le w_n$

ب- لدينا $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n \le u_n \le w_n$

ولدينا $\lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} = 1$

$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2+n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$

فحسب المصداق ④ لدينا $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$

66

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بمايلي :

$$u_n = 1 + \frac{\sin(n)}{n} + \frac{\cos(n)}{n^2} \qquad n\in\mathbb{N}^*$$

1) بين أن $\quad |u_n - 1| \leq \frac{2}{n} \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

2) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة وحدد نهايتها.

الجواب

1) لنبين أن $\quad |u_n-1|\leq \frac{2}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

ليكن n من $\mathbb{N}^*$ لدينا $\quad u_n - 1 = \frac{\sin(n)}{n}+\frac{\cos(n)}{n^2}$

إذن $\quad |u_n-1| = \left|\frac{\sin(n)}{n}+\frac{\cos(n)}{n^2}\right|$

ومنه $\quad |u_n-1|\leq \left|\frac{\sin(n)}{n}\right|+\left|\frac{\cos(n)}{n^2}\right|$

تذكير: لكل a و b من $\mathbb{R}$ $\quad |a+b|\leq|a|+|b|$ (المتفاوتة المثلثية)

إذن $\quad |u_n-1|\leq \frac{|\sin(n)|}{n}+\frac{|\cos(n)|}{n^2}$

بما أن $\quad |\cos(n)|\leq 1$ و $|\sin(n)|\leq 1$

فإن $\quad \frac{|\cos(n)|}{n^2}\leq\frac{1}{n^2}$ و $\frac{|\sin(n)|}{n}\leq\frac{1}{n}$

ومنه $\quad |u_n-1|\leq\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}$

ولدينا لكل n من $\mathbb{N}^*$ $\quad n\leq n^2$ (لأن $1\leq n$)

إذن $\quad \frac{1}{n^2}\leq\frac{1}{n}$ أي $\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\leq\frac{2}{n}$

ومنه $\quad |u_n-1|\leq\frac{2}{n} \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

2) تقارب المتتالية (u_n) .

بما أن $\quad |u_n-1|\leq\frac{2}{n} \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{n}=0$

فحسب المصداق ⑤ المتتالية (u_n) متقاربة و $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$

67

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بمايلي :

$$\begin{cases} u_0=3\\ u_{n+1}=2+\frac{1}{u_n}-\frac{2}{u_n^2} \quad , n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

1) بين أن المتتالية (u_n) مصغورة بالعدد 2 .

2) أ- بين أن لكل n من $\mathbb{N}$ $\quad u_{n+1}-2\leq\frac{1}{2}(u_n-2)$

ب- استنتج أن لكل n من $\mathbb{N}$ $\quad 0<u_n-2\leq\left(\frac{1}{4}\right)^n$

ج- حدد نهاية المتتالية (u_n) .

الجواب

1) لنبين أن المتتالية (u_n) مصغورة بالعدد 2 .

أي لنبين أن $\quad u_n>2 \quad \forall n\in\mathbb{N}$ (البرهان بالترجع)

- من أجل $n=0$ لدينا $u_0=3$ إذن $u_0>2$
- نفترض أن $u_n>2$ ولنبين أن $u_{n+1}>2$

لدينا $\quad u_{n+1}-2=\frac{1}{u_n}-\frac{2}{u_n^2}=\frac{u_n-2}{u_n^2}$

بما أن $u_n>2$ فإن $\quad \frac{u_n-2}{u_n^2}>0$

إذن $\quad u_{n+1}-2>0$ أي $u_{n+1}>2$

وبالتالي $\quad u_n>2 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

ومنه المتتالية (u_n) مصغورة بالعدد 2 .

2) أ- لنبين أن $\quad u_{n+1}-2\leq\frac{1}{2}(u_n-2) \quad \forall n\in\mathbb{N}$

ليكن n من $\mathbb{N}$ لدينا $\quad u_{n+1}-2=\frac{1}{u_n^2}(u_n-2)$

بما أن $u_n>2$ فإن $u_n^2>4$ أي $\frac{1}{u_n^2}<\frac{1}{4}$

ولدينا $u_n-2>0$ إذن $\quad \frac{1}{u_n^2}(u_n-2)<\frac{1}{4}(u_n-2)$.

وبالتالي $\quad u_{n+1}-2\leq\frac{1}{4}(u_n-2) \quad \forall n\in\mathbb{N}$

ج- لنستنتج أن $\quad 0<u_n-2\leq\left(\frac{1}{4}\right)^n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

لدينا $\forall n\in\mathbb{N}\quad 0<u_{n+1}-2\leq \frac{1}{4}(u_n-2)$

ومنه

$$\begin{cases} 0<u_1-2\leq \frac{1}{4}(u_0-2) \\ 0<u_2-2\leq \frac{1}{4}(u_1-2) \\ \text{— — — — — — —} \\ 0<u_{n-1}-2\leq \frac{1}{4}(u_{n-2}-2) \\ 0<u_n-2\leq \frac{1}{4}(u_{n-1}-2) \end{cases}$$

بضرب هذه المتفاوتات طرفا لطرفا وبعد الاختزال نحصل على

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad 0<u_n-2\leq\left(\frac{1}{4}\right)^n(u_0-2)$$

وبما أن $u_0=3$ أي $u_0-2=1$

فإن $\forall n\in\mathbb{N}\quad 0<u_n-2\leq\left(\frac{1}{4}\right)^n$

ج - تحديد نهاية المتتالية (u_n) .

بما أن $\forall n\in\mathbb{N}\quad 0<u_n-2\leq\left(\frac{1}{4}\right)^n$

و $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=0$ (لأن $\left|\frac{1}{4}\right|<1$)

فحسب المصداق ④ المتتالية (u_n) متقاربة و $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=2$

68 نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بمايلي :

$$\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=\sqrt[3]{24+u_n}\ ,\ n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

1) بين بالترجع أن $\forall n\in\mathbb{N}\quad 0<u_n<3$

2) نضع $\forall n\in\mathbb{N}\quad v_n=3-u_n$

أ- بين أن $\forall n\in\mathbb{N}\quad v_n=27-u_{n+1}^3$

ب- استنتج أن $\forall n\in\mathbb{N}\quad \frac{1}{27}v_n\leq v_{n+1}\leq\frac{1}{9}v_n$

ج- بين أن $\forall n\in\mathbb{N}\quad v_n\leq 2\left(\frac{1}{9}\right)^n$

3) حدد نهاية المتتالية (u_n) .

الجواب 1) لنبين بالترجع أن $\forall n\in\mathbb{N}\quad 0<u_n<3$

- من أجل $n=0$ لدينا $u_0=1$ إذن $0<u_0<3$

- نفترض أن $0<u_n<3$ و لنبين أن $0<u_{n+1}<3$

لدينا $0<u_n<3$ إذن $24<u_n+24<27$

بما أن الدالة $x\mapsto\sqrt[3]{x}$ تزايدية قطعا على $\mathbb{R}^+$

فإن $\sqrt[3]{24}<\sqrt[3]{u_n+27}<\sqrt[3]{27}$ إذن $0<u_{n+1}<3$ (لأن $0<\sqrt[3]{24}$)

وبالتالي $\forall n\in\mathbb{N}\quad 0<u_n<3$

2) أ- لنبين أن $\forall n\in\mathbb{N}\quad v_n=27-u_{n+1}^3$

ليكن n من $\mathbb{N}$ لدينا $v_n=3-u_n$

وبما أن $u_{n+1}=\sqrt[3]{24+u_n}$ أي $u_n=u_{n+1}^3-24$

فإن $v_n=3-(u_{n+1}^3-24)$

ومنه $\forall n\in\mathbb{N}\quad v_n=27-u_{n+1}^3$

ب- لنستنتج أن $\forall n\in\mathbb{N}\quad \frac{1}{27}v_n\leq v_{n+1}\leq\frac{1}{9}v_n$

ليكن n من $\mathbb{N}$ لدينا $v_n=27-u_{n+1}^3$

$$v_n=(3-u_{n+1})(9+3u_{n+1}+u_{n+1}^2)$$

لدينا $0<u_{n+1}<3$ إذن $0<u_{n+1}^2<9$ و $0<3u_{n+1}<9$

ومنه $9<9+3u_{n+1}+u_{n+1}^2<27$

وبما أن $3-u_{n+1}>0$ فإن $9(3-u_{n+1})<v_n<27(3-u_{n+1})$

ولدينا $3-u_{n+1}=v_{n+1}$ إذن $9v_{n+1}<v_n<27v_{n+1}$

أي $v_n<27v_{n+1}$ و $9v_{n+1}<v_n$

أي $\frac{1}{27}v_n<v_{n+1}$ و $v_{n+1}<\frac{1}{9}v_n$

ومنه $\forall n\in\mathbb{N}\quad \frac{1}{27}v_n<v_{n+1}<\frac{1}{9}v_n$

ج - لنبين أن $\forall n\in\mathbb{N}\quad v_n \leq 2\left(\frac{1}{9}\right)^n$

لدينا $\forall n\in\mathbb{N}\quad 0<v_{n+1}<\frac{1}{9}v_n$ (حسب السؤال (ب))

ومنه

$$\begin{cases} 0<v_1<\frac{1}{9}v_0 \\ 0<v_2<\frac{1}{9}v_1 \\ ------- \\ 0<v_{n-1}<\frac{1}{9}v_{n-2} \\ 0<v_n<\frac{1}{9}v_{n-1} \end{cases}$$

بضرب هذه المتفاوتات طرفا لطرف و بعد الاختزال نحصل على

$$0<v_n<\left(\frac{1}{9}\right)^n\cdot v_0$$

بما أن $v_0=3-u_0=2$ فإن $\forall n\in\mathbb{N}\quad 0<v_n<2\left(\frac{1}{9}\right)^n$

3) تحديد نهاية المتتالية (u_n).

لدينا $\forall n\in\mathbb{N}\quad 0<v_n<2\left(\frac{1}{9}\right)^n$ و $v_n=3-u_n$

إذن $\forall n\in\mathbb{N}\quad 0<3-u_n<2\left(\frac{1}{9}\right)^n$

وبما أن $\lim\limits_{n\to+\infty} 2\left(\frac{1}{9}\right)^n=0$ (لأن $\left|\frac{1}{9}\right|<1$)

فحسب المصداق ④ المتتالية (u_n) متقاربة و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=3$

69 نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq1}$ المعرفة بمايلي:

$$\begin{cases} u_1=\frac{3}{2} \\ u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{2}{u_n}\right) \end{cases},\ n\in\mathbb{N}$$

1) أ- بين أن $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad u_n>0$

ب- بين أن $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad u_{n+1}-\sqrt{2}=\frac{(u_n-\sqrt{2})^2}{2u_n}$

وأن $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n>\sqrt{2}$

ج - بين أن $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad u_{n+1}-\sqrt{2}=\frac{1}{2}(u_n-\sqrt{2})+\frac{1}{u_n}-\frac{1}{\sqrt{2}}$

د- استنتج نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$.

2) ادرس تقارب المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ و حدد نهايتها بدراسة الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي:

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{2}{x}\right)$$

الجواب

1) أ- لنبين أن $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad u_n>0$ (البرهان بالترجع)

- من أجل $n=1$ لدينا $u_1=\frac{3}{2}$ إذن $u_1>0$
- نفترض أن $u_n>0$ و لنبين أن $u_{n+1}>0$

لدينا $u_n>0$ إذن $\frac{2}{u_n}>0$

إذن $\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{2}{u_n}\right)>0$ ومنه $u_{n+1}>0$

وبالتالي $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad u_n>0$.

ب- لنبين أن $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad u_{n+1}-\sqrt{2}=\frac{(u_n-\sqrt{2})^2}{2u_n}$

ليكن n من $\mathbb{N}^*$ لدينا $u_{n+1}-\sqrt{2}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{2}{u_n}\right)-\sqrt{2}$

$$=\frac{u_n^2+2-2\sqrt{2}u_n}{2u_n}=\frac{(u_n-\sqrt{2})^2}{2u_n}$$

• لنبين بالترجع أن $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad u_n>\sqrt{2}$

- من أجل $n=1$ لدينا $u_1=\frac{3}{2}$ إذن $u_1>\sqrt{2}$
- نفترض أن $u_n>\sqrt{2}$ و لنبين أن $u_{n+1}>\sqrt{2}$

لدينا $u_{n+1}-\sqrt{2}=\frac{1}{2u_n}(u_n-\sqrt{2})^2$

بما أن $u_n>2$ فإن $\frac{1}{2u_n}(u_n-\sqrt{2})^2>0$

أي $u_{n+1}-\sqrt{2}>0$ ومنه $u_{n+1}>\sqrt{2}$

وبالتالي $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad u_n>\sqrt{2}$

ج- لنبين أن $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad u_{n+1}-\sqrt{2}=\frac{1}{2}(u_n-\sqrt{2})+\frac{1}{u_n}-\frac{1}{\sqrt{2}}$

ليكن n من $\mathbb{N}^*$ لدينا $u_{n+1}-\sqrt{2}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{2}{u_n}\right)-\sqrt{2}$

$$u_{n+1}-\sqrt{2}=\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{u_n}-\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$u_{n+1}-\sqrt{2}=\frac{1}{2}(u_n-\sqrt{2})+\frac{1}{u_n}-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

• لنستنتج أن $u_n-\sqrt{2}<(\frac{1}{2})^n \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

ليكن n من $\mathbb{N}^*$ لدينا $u_{n+1}-\sqrt{2}=\frac{1}{2}(u_n-\sqrt{2})+\frac{1}{u_n}-\frac{1}{\sqrt{2}}$

بما أن $u_n>\sqrt{2}$ فإن $\frac{1}{\sqrt{2}}>\frac{1}{u_n}$ أي $\frac{1}{u_n}-\frac{1}{\sqrt{2}}<0$

إذن $\frac{1}{2}(u_n-\sqrt{2})+\frac{1}{u_n}-\frac{1}{\sqrt{2}}<\frac{1}{2}(u_n-\sqrt{2})$

أي $0<u_{n+1}-\sqrt{2}<\frac{1}{2}(u_n-\sqrt{2}) \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

ومنه

$$\begin{cases} 0<u_1-\sqrt{2}<\frac{1}{2}(u_0-\sqrt{2}) \\ 0<u_2-\sqrt{2}<\frac{1}{2}(u_1-\sqrt{2}) \\ \text{— — — — — —} \\ 0<u_{n-1}-\sqrt{2}<\frac{1}{2}(u_{n-2}-\sqrt{2}) \\ 0<u_n-\sqrt{2}<\frac{1}{2}(u_{n-1}-\sqrt{2}) \end{cases}$$

بضرب هذه المتفاوتات طرفا بطرف وبعد الاختزال نحصل على

$$0<u_n-\sqrt{2}<(\frac{1}{2})^{n-1}(u_0-\sqrt{2})$$

لدينا $u_0-\sqrt{2}=\frac{3}{2}-\sqrt{2}<\frac{1}{2}$

ومنه $0<u_n-\sqrt{2}<(\frac{1}{2})^n \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

د- بما أن $0<u_n-\sqrt{2}<(\frac{1}{2})^n \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$ و $\lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{2})^n=0$

فحسب المصداق ④ لدينا (u_n) متقاربة و $\lim_{n\to+\infty}u_n=\sqrt{2}$

ج) دراسة تقارب المتتالية (u_n) باستعمال الدالة f .

لدينا $f(x)=\frac{1}{2}(x+\frac{2}{x})$ ، $x\in[\sqrt{2},+\infty[=I$

$$f'(x)=\frac{1}{2}(1-\frac{2}{x^2})=\frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{2x^2}\geq 0$$

ومنه f متصلة وتزايدية قطعا على المجال I

و منه $f(I)=[f(\sqrt{2}),\lim_{x\to+\infty}f(x)[=[\sqrt{2},+\infty[$ ومنه $f(I)=I$

• لندرس رتابة المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$. لدينا $u_{n+1}=f(u_n)$

- ولدينا $u_2-u_1=f(u_1)-u_1=\frac{1}{2}(u_1+\frac{2}{u_1})-u_1$

$$u_2-u_1=\frac{3}{4}+\frac{2}{3}-\frac{3}{2}=-\frac{1}{12}<0$$

إذن $u_2<u_1$.

- نفترض أن $u_{n+1}<u_n$ ولنبين أن $u_{n+2}<u_{n+1}$.

بما أن f دالة تزايدية على $[\sqrt{2};+\infty[$ و $u_n>\sqrt{2}$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$

فإن $f(u_{n+1})<f(u_n)$ أي $u_{n+2}<u_{n+1}$

إذن $u_{n+1}<u_n$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ ومنه فإن $(u_n)_{n\geq1}$ تناقصية قطعا .

• بما أن المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ تناقصية ومصغورة فإنها متقاربة .

> لتكن (u_n) متتالية عددية من نوع $u_{n+1}=f(u_n)$
> مع $u_0\in I$ و f دالة متصلة على المجال I بحيث: $f(I)\subset I$
> • إذا كانت المتتالية (u_n) متقاربة نحو l فإن:
> l حل للمعادلة : $f(x)=x$ $(x\in I)$.
> • إذا كانت (u_n) متتالية تزايدية ومكبورة فإنها متقاربة .
> • إذا كانت (u_n) متتالية تناقصية ومصغورة فإنها متقاربة .

ليكن l نهاية المتتالية (u_n) إذن l هو حل للمعادلة $f(x)=x$ و $x\geq\sqrt{2}$

لدينا $f(x)=x \iff x=\frac{1}{2}(x+\frac{2}{x})$

$$\iff x^2-2=0$$

$$\iff x=-\sqrt{2} \text{ أو } x=\sqrt{2}$$

وحيث أن $x\geq\sqrt{2}$ فإن $x=\sqrt{2}$ إذن $l=\sqrt{2}$

وبالتالي فإن $\lim_{n\to+\infty}u_n=\sqrt{2}$

70

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بمايلي :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 8}{2u_n + 1} \quad , n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) احسب u_1 و u_2 و u_3.

2) نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $]-\frac{1}{2}, +\infty[$ بمايلي :

$$f(x) = \frac{x+8}{2x+1}$$

أ- أنشئ المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) الذي معادلته : $y = x$ في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

ب- باستعمال المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) أنشئ نقط المحور $(O, \vec{i})$ ذات الأفاصيل u_0 و u_1 و u_2 و u_3.

ج- كيف يمكن معرفة نهاية المتتالية (u_n) عندما تكون متقاربة ؟

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة بمايلي :

$$v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 2} \qquad n \in \mathbb{N}$$

أ- احسب v_0 و v_1.

ب- بين أن (v_n) متتالية هندسية محدداً أساسها.

ج- حدد نهاية المتتالية (v_n).

4) أ- حدد u_n بدلالة n.

ب- حدد نهاية المتتالية (u_n)

الجواب

1) لدينا $u_1 = \dfrac{u_0 + 8}{2u_0 + 1} = 3$ و $u_2 = \dfrac{u_1 + 8}{2u_1 + 1} = \dfrac{11}{7}$

$$u_3 = \frac{u_2 + 8}{2u_2 + 1} = \frac{67}{29}$$

2) أ- إنشاء المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ)

$$\forall x \in]-\tfrac{1}{2}, +\infty[\quad f'(x) = \frac{-15}{(2x+1)^2}$$

x	$-1/2$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$+\infty$ ↘ $\frac{1}{2}$

(C_f) يقبل مقاربين معادلتهما : $x = -\frac{1}{2}$ ، $y = \frac{1}{2}$

ج- المنحنى (C_f) يعطي تقارب المتتالية (u_n) نحو أفصول نقطة تقاطع المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) أي نحو العدد 2

3) أ- لدينا $v_1 = \dfrac{u_1 - 2}{u_1 + 2} = \dfrac{1}{5}$ و $v_0 = \dfrac{u_0 - 2}{u_0 + 2} = -\dfrac{1}{3}$

ب- لنبين أن (v_n) هندسية.

ليكن n من $\mathbb{N}$

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1} + 2}$$

$$v_{n+1} = \frac{\frac{u_n + 8}{2u_n + 1} - 2}{\frac{u_n + 8}{2u_n + 1} + 2} = \frac{u_n + 8 - 4u_n - 2}{u_n + 8 + 4u_n + 2} = \frac{-3u_n + 6}{5u_n + 10}$$

$$v_{n+1} = \frac{-3}{5} \times \frac{u_n - 2}{u_n + 2}$$

إذن $\quad v_{n+1} = -\frac{3}{5} v_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = -\frac{3}{5}$

ب- لدينا $\quad v_n = v_0 \times q^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

$$v_n = -\frac{1}{3} \times \left(-\frac{3}{5}\right)^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

بما أن $\left|-\frac{3}{5}\right| < 1$ فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$

4) أ- لدينا $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 2} \iff u_n v_n + 2v_n = u_n - 2$

$$\iff u_n(v_n - 1) = -2v_n - 2$$

$$\iff u_n = \frac{2(v_n + 1)}{-v_n + 1}$$

ومنه $\quad u_n = \dfrac{2\left[-\frac{1}{3}\left(-\frac{3}{5}\right)^n + 1\right]}{\frac{1}{3}\left(-\frac{3}{5}\right)^n + 1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

ب- بما أن $\quad u_n = \dfrac{2(v_n + 1)}{-v_n + 1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

و $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$

فإن $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$

71

1) نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $I=]6,+\infty[$ بمايلي: $f(x)=\frac{2}{5}\times\frac{x^2+3x+6}{x-2}$

بين أن الدالة f متصلة وتزايدية قطعاً على I

واستنتج أن $f(I)=I$.

2) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بمايلي:

$$\begin{cases} u_0=10 \\ u_{n+1}=f(u_n) \quad , n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

أ- بين أن $u_n>6 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

ب- بين أن المتتالية (u_n) تناقصية قطعاً.

ج- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة وحدد نهايتها.

الجواب

1) لدينا $f(x)=\frac{2}{5}\times\frac{x^2+3x+6}{x-2}$ ، $x\in I=]6,+\infty[$

بما أن الدالة $x\mapsto\frac{2}{5}\times\frac{x^2+3x+6}{x-2}$ متصلة على $\mathbb{R}-\{2\}$ لأنها دالة جذرية

ومنه الدالة f متصلة على المجال I (لأن $I\subset\mathbb{R}-\{2\}$)

ولدينا $\forall x\in I$

$$f'(x)=\frac{2}{5}\times\frac{(2x+3)(x-2)-(x^2+3x+6)}{(x-2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2}{5}\times\frac{x^2-4x-12}{(x-2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2}{5}\times\frac{(x+2)(x-6)}{(x-2)^2}$$

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $x-6$ على المجال $I=]6,+\infty[$

إذن $f'(x)>0 \quad \forall x\in I$

ومنه f تزايدية قطعاً على I.

لدينا $f(I)=]\lim_{\substack{x\to 6\\ x>6}}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)[=]6,+\infty[$

ومنه $f(I)=I$

2) أ- لنبين بالترجع أن $u_n\geq 6 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

- من أجل $n=0$ لدينا $u_0=10$ إذن $u_0>6$
- نفترض أن $u_n>6$ ولنبين أن $u_{n+1}>6$

بما أن $f(I)=I$ و $u_n\in I$ فإن $u_n\in I$

ومنه $f(u_n)>6$ أي $u_{n+1}>6$

وبالتالي $u_n>6 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

ب- لنبين أن (u_n) متتالية تناقصية قطعاً

أي أن $u_{n+1}<u_n \quad \forall n\in\mathbb{N}$ (بالترجع)

- من أجل $n=0$ لدينا $u_0=10$ و $u_1=f(u_0)=\frac{34}{5}$

إذن $u_1<u_0$

- نفترض أن $u_{n+1}<u_n$ ولنبين أن $u_{n+2}<u_{n+1}$

بما أن f تزايدية قطعاً على I و $u_{n+1}<u_n$

فإن $f(u_{n+1})<f(u_n)$ أي $u_{n+2}<u_{n+1}$

وبالتالي $u_{n+1}<u_n \quad \forall n\in I$

ومنه (u_n) متتالية تناقصية قطعاً.

ج- بما أن (u_n) تناقصية ومصغورة بالعدد 6 فإنها متقاربة

وبما أن f دالة متصلة على I و $f(I)=I$

فإن نهاية المتتالية (u_n) : l تحقق $l=f(l)$ و $l\geq 6$

لدينا $f(l)=l \Leftrightarrow \frac{2}{5}\times\frac{l^2+3l+6}{l-2}=l$

$$\Leftrightarrow 2l^2+6l+12=5l^2-10l$$

$$\Leftrightarrow 3l^2-16l-12=0$$

$$\Leftrightarrow (l-6)(3l+2)=0$$

$$\Leftrightarrow l=6 \text{ أو } l=-\frac{2}{3}$$

بما أن $l\geq 6$ فإن $l=6$

وبالتالي $\lim_{n\to+\infty}u_n=6$

72

1) نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $I=[2,3]$ بمايلي : $f(x)=\frac{5x+2}{x+3}$

أ_ ادرس تغيرات الدالة f على I .

ب_ بين أن $f(I)\subset I$.

2) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بمايلي :

$$\begin{cases} u_0=2 \\ u_{n+1}=f(u_n) \quad , n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

أ_ بين بالترجع أن $\forall n\in\mathbb{N} \quad 2\leq u_n\leq 3$

ب_ بين أن المتتالية (u_n) تزايدية .

3) بين أن المتتالية (u_n) متقاربة وحدد نهايتها .

الجواب

1) أ_ تغيرات الدالة f على I .

لدينا $f(x)=\frac{5x+2}{x+3}$ $\quad x\in I=[2,3]$

$$f'(x)=\frac{13}{(x+3)^2}>0$$

ومنه f تزايدية قطعاً على I .

ب_ لنبين أن $f(I)\subset I$.

بما أن f متصلة و تزايدية قطعاً على I

فإن $f(I)=[f(2),f(3)]=[\frac{12}{5},\frac{17}{6}]$

لدينا $\frac{17}{6}<3$ و $2<\frac{12}{5}$ إذن $[\frac{12}{5},\frac{17}{6}]\subset[2,3]$

ومنه $f(I)\subset I$

2) أ_ لنبين بالترجع أن $2\leq u_n\leq 3 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

_ من أجل $n=0$ لدينا $u_0=2$ إذن $2\leq u_0\leq 3$

_ نفترض أن $2\leq u_n\leq 3$ ولنبين أن $2\leq u_{n+1}\leq 3$

بما أن $2\leq u_n\leq 3$ أي $u_n\in I$ و $f(I)\subset I$

فإن $f(u_n)\in I$ أي $u_{n+1}\in I$ ومنه $2\leq u_{n+1}\leq 3$

وبالتالي $2\leq u_n\leq 3 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

ب_ لنبين أن المتتالية (u_n) تزايدية .

أي أن $u_n\leq u_{n+1} \quad \forall n\in\mathbb{N}$ (بالترجع)

_ من أجل $n=0$ لدينا $u_0=2$ و $u_1=f(u_0)=\frac{12}{5}$

إذن $u_0\leq u_1$

_ نفترض أن $u_n\leq u_{n+1}$ ولنبين أن $u_{n+1}\leq u_{n+2}$

بما أن f تزايدية على I و $u_n\leq u_{n+1}$

فإن $f(u_n)\leq f(u_{n+1})$ أي $u_{n+1}\leq u_{n+2}$

وبالتالي $u_n\leq u_{n+1} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

ومنه (u_n) متتالية تزايدية .

3) بما أن (u_n) متتالية تزايدية و مكبورة بالعدد 3

فإنها متقاربة ولتكن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=l$

وبما أن f دالة متصلة على I و $f(I)\subset I$

فإن $l=f(l)$ و $l\in I$

لدينا $l=f(l) \Leftrightarrow l=\frac{5l+2}{l+3}$

$$\Leftrightarrow l^2+3l=5l+2$$

$$\Leftrightarrow l^2-2l-2=0$$

$$\Leftrightarrow l=1+\sqrt{3} \text{ أو } l=1-\sqrt{3}$$

بما أن $l\in I$ فإن $l=1+\sqrt{3}$

ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=1+\sqrt{3}$.

73

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $I=]1,+\infty[$ بمايلي $f(x)=\frac{x^2-3x+6}{x-1}$

1) بين أن لكل x من I $f(x)\geq 3$.

2) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بمايلي .

$u_{n+1}=f(u_n) \quad , n\in\mathbb{N}$ و $u_0>1$

أ- بين أن $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad u_n\geq 3$

ب- بين أن المتتالية (u_n) رتيبة.

ج- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة وحدد نهايتها.

الجواب 1) لنبين $\forall x\in I\quad f(x)\geq 3$

ليكن x من I لدينا $f(x)-3=\frac{x^2-3x+6}{x-1}-3=\frac{x^2-6x+9}{x-1}$

$=\frac{(x-3)^2}{x-1}$

بما أن $x>1$ فإن $x-1>0$ و $(x-3)^2\geq 0$

إذن $f(x)-3\geq 0$ ومنه $\forall x\in I\quad f(x)\geq 3$

2) أ- لنبين بالترجع أن $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad u_n\geq 3$

- من أجل $n=1$ لدينا $u_0>1$ إذن $f(u_0)\geq 3$

(حسب السؤال 1) ولدينا $u_1=f(u_0)$ إذن $u_1\geq 3$

- نفترض أن $u_n\geq 3$ ولنبين أن $u_{n+1}\geq 3$

بما أن $u_n\geq 3$ فإن $u_n>1$ إذن $f(u_n)\geq 3$

ومنه $u_{n+1}\geq 3$

وبالتالي $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad u_n\geq 3$.

ب- رتابة المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

ليكن n من $\mathbb{N}^*$ لدينا: $u_{n+1}-u_n=\frac{2(3-u_n)}{u_n-1}$

بما أن $u_n\geq 3$ فإن $3-u_n\leq 0$ و $u_n-1>0$

إذن $u_{n+1}-u_n\leq 0$ ومنه المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ تناقصية.

ج- بما أن $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية تناقصية ومصغورة فهي متقاربة.

لتكن $l=\lim_{n\to+\infty} u_n$.

بما أن f دالة متصلة على I و $f(I)\subset I$ $(f(I)\subset[3,+\infty[)$

فإن $l=f(l)$ و $l\geq 3$

$l=f(l)\Leftrightarrow l=\frac{l^2-3l+6}{l-1}\Leftrightarrow l^2-l=l^2-3l+6$

$\Leftrightarrow l=3$

ومنه $\lim_{n\to+\infty} u_n=3$

71

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $]-1,+\infty[$ بمايلي: $f(x)=\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x}}$

ليكن (C_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) أ- احسب $\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

ب- حدد الفرعين اللانهائيين للمنحنى (C_f).

2) أ- بين أن لكل x من $]-1,+\infty[$ $f'(x)=\frac{\sqrt{2}(x+2)}{2\sqrt{(1+x)^3}}$

ضع جدول تغيرات الدالة f.

ب- حدد المجال $f([0,1])$.

3) أ- حدد معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الأفصول $x_0=0$.

ب- أنشئ المماس (T) والمنحنى (C_f).

4) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بمايلي:

$$\begin{cases} u_0=\frac{1}{2} \\ u_{n+1}=\frac{\sqrt{2}\,u_n}{\sqrt{1+u_n}}\ ,\ n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

أ- تحقق من أن $\forall n\in\mathbb{N}\quad 0<u_n<1$

ب- بين أن $\forall n\in\mathbb{N}\quad \frac{u_{n+1}}{u_n}>1$

ج- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة.

د- حدد نهاية المتتالية.

الجواب 1) حساب النهايتين $\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

بما أن $\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}}\sqrt{1+x}=0^+$ و $\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}}\sqrt{2}x=-\sqrt{2}$

فإن $\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x)=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{1+x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2}x}{x+1}\sqrt{1+x}=\sqrt{2}\times+\infty=+\infty$

ب ـ تحديد الفرعين اللانهائيين للمنحنى (C_f) .

بما أن $\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x) = -\infty$ فإن المنحنى (C_f) يقبل مقارب عمودي معادلته $x=-1$

لدينا $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+x}} = 0$

ومنه المنحنى (C_f) يقبل محور الفواصيل كإتجاه مقارب بجوار $+\infty$

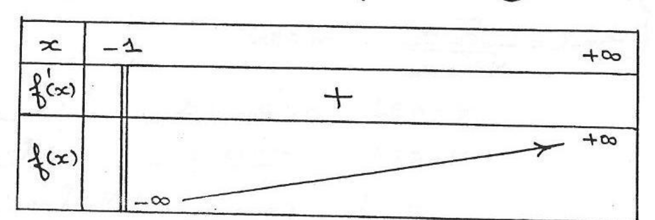
2) أ ليكن x من $]-1,+\infty[$ لدينا $f(x)=\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{1+x}}$

$$f'(x)=\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{1+x}-x\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+x}}}{(\sqrt{1+x})^2}=\sqrt{2}\,\frac{2(1+x)-x}{2(\sqrt{1+x})^3}$$

ومنه $f'(x)=\frac{\sqrt{2}(x+2)}{2\sqrt{(1+x)^3}}$

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $x+2$ على $]-1,+\infty[$

ومنه جدول تغيرات الدالة f.



x	-1	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗ $+\infty$

ب ـ تحديد $f([0,1])$

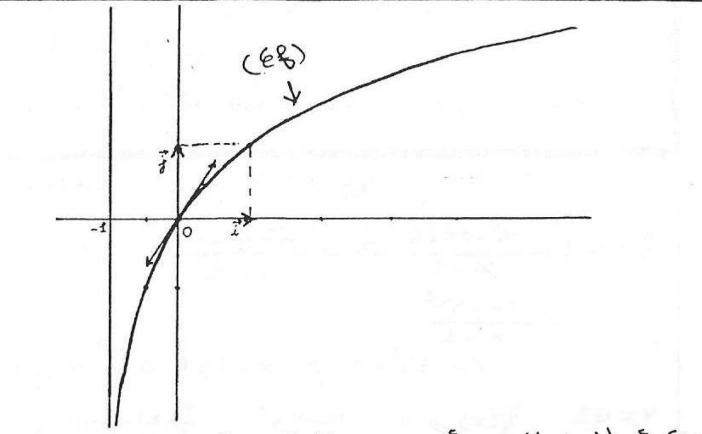
بما أن f متصلة وتزايدية على $[0,1]$ فإن $f([0,1])=[f(0),f(1)]$

ومنه $f([0,1])=[0,1]$

3) أ ـ معادلة المماس (T) هي : $y=f'(0)(x-0)+f(0)$

ومنه (T) $y=\sqrt{2}x$ (لأن $f'(0)=\sqrt{2}$ و $f(0)=0$)

ب ـ إنشاء المماس (T) والمنحنى (C_f)



4) أ ـ لنبين بالتراجع أن $\forall n\in\mathbb{N}\quad 0<u_n<1$

- من أجل $n=0$ لدينا $u_0=\frac{1}{2}$ إذن $0<u_0<1$

- نفترض أن $0<u_n<1$ ولنبين أن $0<u_{n+1}<1$

بما أن $0<u_n<1$ و f تزايدية قطعًا على $[0,1]$

فإن $f(0)<f(u_n)<f(1)$ أي $0<u_{n+1}<1$

وبالتالي $\forall n\in\mathbb{N}\quad 0<u_n<1$

ب ـ لنبين أن $\frac{u_{n+1}}{u_n}>1\quad \forall n\in\mathbb{N}$

ليكن n من $\mathbb{N}$ لدينا $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{\sqrt{2}u_n}{\sqrt{1+u_n}}}{u_n}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+u_n}}$

بما أن $0<u_n<1$ فإن $1<1+u_n<2$

إذن $\sqrt{1}<\sqrt{1+u_n}<\sqrt{2}$ أي $\frac{1}{\sqrt{2}}<\frac{1}{\sqrt{1+u_n}}<\frac{1}{\sqrt{1}}$

ومنه $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+u_n}}>1$ أي $\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$

ج ـ بما أن $u_n>0$ و $\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$ فإن $u_{n+1}>u_n$

ومنه (u_n) متتالية تزايدية .

إذن بما أن (u_n) متتالية تزايدية ومكبورة بالعدد 1 فإنها متقاربة .

د- لنكن $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ولدينا $u_{n+1} = f(u_n)$ ، $u_0 = \frac{1}{2}$ ، $n\in\mathbb{N}$

بما أن f دالة متصلة على $I=[0,1]$ و $f(I)=I$

فإن $\ell = f(\ell)$ و $0\le \ell \le 1$

لدينا $\ell(\sqrt{1+\ell}-\sqrt{2})=0 \iff \ell = \dfrac{\sqrt{2}\,\ell}{\sqrt{1+\ell}} \iff \ell = f(\ell)$

$\iff \ell=0$ أو $\sqrt{1+\ell}=\sqrt{2}$

$\iff \ell=0$ أو $\ell=1$

بما أن المتتالية (u_n) تزايدية و $0<u_n<1$ $\forall n\in\mathbb{N}$

فإن $\ell=1$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

75

I- نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $[-1,+\infty[$ بما يلي: $f(x)=x\sqrt[3]{1+x}$

1) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في $x_0=-1$.

2) أ- بين أن لكل x من $]-1,+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{4x+3}{3\sqrt[3]{(1+x)^3}}$

ب- ادرس تغيرات الدالة f.

ج- بين أن لكل x من $]-1,+\infty[$: $f(x)\ge x$.

3) ليكن (C_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

أ- اكتب معادلة ديكارتية لمماس (C_f) في النقطة $O(0,0)$.

ب- أنشئ المنحنى (C_f) ومماسه في النقطة O (نأخذ $\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\simeq 0{,}6$)

II- نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} u_0\in[-1,+\infty[\setminus\{0\} \\ u_{n+1}=f(u_n) \quad , n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

1) بين أن (u_n) متتالية تزايدية.

2) نفترض أن $-1\le u_0<0$.

أ- بين أن $\forall n\in\mathbb{N}$ $-1\le u_n<0$

ب- بين أن (u_n) متتالية متقاربة وحدد نهايتها.

3) نفترض أن $u_0>0$ ونضع $k=u_0(\sqrt[3]{1+u_0}-1)$

أ- بين أن $u_{n+1}-u_n\ge k$ $\forall n\in\mathbb{N}$

ب- حدد نهاية المتتالية (u_n).

الجواب I- 1) قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في $x_0=-1$.

لدينا $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} \dfrac{x\sqrt[3]{x+1}}{(\sqrt[3]{x+1})^3}$

$= \lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} \dfrac{x}{(\sqrt[3]{x+1})^2} = -\infty$

إذن الدالة f غير قابلة للإشتقاق على اليمين في $x_0=-1$ والمنحنى (C_f) يقبل نصف مماس عمودي متجه نحو الأسفل عند النقطة $A(-1,0)$

2) أ- ليكن x من $]-1,+\infty[$ لدينا $f(x)=x\sqrt[3]{1+x}=x(1+x)^{\frac{1}{3}}$

$f'(x)=(1+x)^{\frac{1}{3}}+x\cdot\frac{1}{3}(1+x)^{-\frac{2}{3}}$

$f'(x)=(1+x)^{\frac{1}{3}}+\dfrac{x}{3(1+x)^{2/3}}=\dfrac{3(1+x)+x}{3(1+x)^{2/3}}$

ومنه $f'(x)=\dfrac{4x+3}{3\sqrt[3]{(1+x)^2}}$

ب- تغيرات الدالة f.

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $4x+3$ على $]-1,+\infty[$

ومنه جدول تغيرات f

x	-1	$-\frac{3}{4}$	$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$ $-$	0	$+$
$f(x)$	0 ↘	$-\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$	↗ $+\infty$

ج- لنبين أن $f(x)\ge x$ $\forall x\in]-1,+\infty[$

ليكن x من $]-1,+\infty[$ لدينا $f(x)-x=x(\sqrt[3]{1+x}-1)$

لندرس إشارة $f(x)-x$ على $]-1,+\infty[$

x	-1		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	
$\sqrt[3]{1+x}$		$-$	0	$+$	
$f(x)-x$		$+$	0	$+$	

ومنه $f(x)-x\geq 0$ لكل x من $]-1,+\infty[$

أي $f(x)\geq x$ $\quad \forall x\in]-1,+\infty[$.

3) أ- معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ عند $O(0,0)$

هي $y=f'(0)(x-0)+f(0)$

أي $y=x$ (لأن $f'(0)=1$ و $f(0)=0$)

ب- إنشاء المنحنى $(\mathscr{C}_f)$

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{1+x}=+\infty$

ومنه المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل محور الأراتيب كإتجاه مقارب بجوار $+\infty$.

II-1) لنبين أن (u_n) متتالية تزايدية

أي أن $u_{n+1}\geq u_n$ $\quad \forall n\in\mathbb{N}$

لدينا $\begin{cases} u_0\in[-1,+\infty[\setminus\{0\} \\ u_{n+1}=f(u_n) \quad , n\in\mathbb{N}\end{cases}$

بما أن لكل x من $]-1,+\infty[$ لدينا $f(x)\geq x$

فإن $f(u_n)\geq u_n$ أي $u_{n+1}\geq u_n$ $\quad \forall n\in\mathbb{N}$

ومنه (u_n) تزايدية.

2) نفترض أن $-1\leq u_0<0$

لنبين أن $-1\leq u_n\leq 0$ $\quad \forall n\in\mathbb{N}$ (بالترجع)

- من أجل $n=0$ لدينا $-1\leq u_0\leq 0$

- نفترض أن $-1\leq u_n\leq 0$ ولنبين أن $-1\leq u_{n+1}\leq 0$

من خلال دراسة الدالة f لدينا $f([-1,0])=[-\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{1}{4}},0]$

ومنه $f([-1,0])\subset[-1,0]$.

لدينا $-1\leq u_n\leq 0$ أي $u_n\in[-1,0]$

إذن $f(u_n)\in[-1,0]$ أي $u_{n+1}\in[-1,0]$

أي $-1\leq u_{n+1}\leq 0$

وبالتالي $-1\leq u_n\leq 0$ $\quad \forall n\in\mathbb{N}$

ب- بما أن (u_n) متتالية تزايدية ومحدودة بالعدد 0 فإنها متقاربة. وليكن $l=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

بما أن f دالة متصلة على $I=[-1,0]$ و $f(I)\subset I$

فإن $l=f(l)$ و $-1\leq l\leq 0$

لدينا $l=f(l)\Leftrightarrow l=l\sqrt[3]{1+l}\Leftrightarrow l(\sqrt[3]{1+l}-1)=0$

$\Leftrightarrow l=0$ أو $\sqrt[3]{1+l}=1$

$\Leftrightarrow l=0$

ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

3) نفترض أن $u_0>0$ و نضع $k=u_0(\sqrt[3]{u_0+1}-1)$

أ- بما أن المتتالية (u_n) تزايدية فإن $u_n\geq u_0$ $\quad \forall n\in\mathbb{N}$

لدينا $u_{n+1}-u_n=u_n(\sqrt[3]{1+u_n}-1)$ $\quad \forall n\in\mathbb{N}$

لدينا $u_n\geq u_0$ إذن $\sqrt[3]{1+u_n}\geq\sqrt[3]{1+u_0}$

إذن $u_n\geq u_0$ و $\sqrt[3]{1+u_n}-1\geq\sqrt[3]{1+u_0}$

ومنه $(\sqrt[3]{u_{n+1}}-1)u_n \geq (\sqrt[3]{1+u_0}-1)u_0$

أي $u_{n+1}-u_n \geq (\sqrt[3]{1+u_0}-1)u_0$

ومنه $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+1}-u_n \geq k$

ب ـ لنحدد نهاية المتتالية (u_n) .

لدينا $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+1}-u_n \geq k$

ومنه

$$\begin{cases} u_1-u_0\geq k \\ u_2-u_1\geq k \\ \dots\dots \\ u_{n-1}-u_{n-2}\geq k \\ u_n-u_{n-1}\geq k \end{cases}$$

بجمع هذه المتفاوتات طرفا لطرف وبعد الاختزال نحصل على

$$u_n-u_0 \geq \underbrace{k+k+\dots+k}_{n\ \text{مرة}}$$

ومنه $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n \geq kn+u_0$

بما أن $\lim_{n\to+\infty}(kn+u_0)=+\infty$ (لأن $k>0$)

فحسب المصداق ① لدينا $\lim_{n\to+\infty}u_n=+\infty$.

76

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بمايلي :

$u_0\in[0,1]$ و $u_{n+1}=\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}$ $\quad n\in\mathbb{N}$

1) بين أن $\forall n\in\mathbb{N}\quad 0\leq u_n\leq 1$

2) بين أن المتتالية (u_n) تزايدية .

3) استنتج أن (u_n) متقاربة .

4) نضع $u_0=\cos\theta$ حيث $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$

أ- بين بالترجع أن $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=\cos(\frac{\theta}{2^n})$

ب ـ حدد $\lim_{n\to+\infty}u_n$.

الجواب 1) لنبين بالترجع أن $\forall n\in\mathbb{N}\quad 0\leq u_n\leq 1$

- من أجل $n=0$ لدينا $u_0\in[0,1]$ إذن $0\leq u_0\leq 1$

- نفترض أن $0\leq u_n\leq 1$ ولنبين أن $0\leq u_{n+1}\leq 1$

لدينا

$$0\leq u_n\leq 1 \Rightarrow 1\leq 1+u_n\leq 2$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}\leq\frac{1+u_n}{2}\leq 1$$
$$\Rightarrow \sqrt{\frac{1}{2}}\leq\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}\leq 1$$
$$\Rightarrow 0\leq u_{n+1}\leq 1 \quad (\text{لأن } 0\leq\sqrt{\tfrac{1}{2}})$$

ومنه $\forall n\in\mathbb{N}\quad 0\leq u_n\leq 1$

2) لنبين أن المتتالية (u_n) تزايدية .

ليكن n من $\mathbb{N}$ لدينا $u_{n+1}-u_n=\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}-u_n$

$$=\frac{\frac{1+u_n}{2}-u_n}{\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}+u_n}=\frac{1-u_n}{2(\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}+u_n)}$$

بما أن $0\leq u_n\leq 1$ فإن $1-u_n\geq 0$ و $2(\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}+u_n)>0$

إذن $u_{n+1}-u_n\geq 0$ ومنه (u_n) متتالية تزايدية .

3) بما أن (u_n) متتالية تزايدية ومكبورة بالعدد 1 فإنها متقاربة .

4) أ- لنبين بالترجع أن $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=\cos(\frac{\theta}{2^n})$

- من أجل $n=0$ لدينا $u_0=\cos(\theta)$ إذن $u_0=\cos(\frac{\theta}{2^0})$

- نفترض أن $u_n=\cos(\frac{\theta}{2^n})$ ولنبين أن $u_{n+1}=\cos(\frac{\theta}{2^{n+1}})$

لدينا $u_{n+1}=\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}=\sqrt{\frac{1+\cos(\frac{\theta}{2^n})}{2}}$

نعلم أن $1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}$ إذن $1+\cos\frac{\theta}{2^n}=2\cos^2\frac{\theta}{2^{n+1}}$

$$\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\theta}{2^n}}{2}}=\sqrt{\cos^2\frac{\theta}{2^{n+1}}}=\cos\frac{\theta}{2^{n+1}} \quad \left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\in[0,\frac{\pi}{2^{n+2}}],\ \cos\frac{\theta}{2^{n+1}}\geq 0\right)$$

ومنه $u_{n+1}=\cos(\frac{\theta}{2^{n+1}})$

وبالتالي $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=\cos(\frac{\theta}{2^n})$

ب - لنحدد $\lim_{n\to+\infty} u_n$

لدينا لكل n من $\mathbb{N}$ $u_n = \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$

بما أن $\lim_{n\to+\infty} \frac{\theta}{2^n} = 0$ والدالة $x \mapsto \cos x$ متصلة في $x_0=0$

فإن $\lim_{n\to+\infty} \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right) = \cos(0)$

ومنه $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

77

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بمايلي:

$u_0=1$ و $u_{n+1}=u_n(1+u_n)$ $\quad n\in\mathbb{N}$

1) بين أن (u_n) تزايدية واستنتج أن $\forall n\in\mathbb{N}\ \ u_n\geq 1$

2) بين أن $\forall n\in\mathbb{N}\ \ u_n^2 \geq u_n$ ثم أن $\forall n\in\mathbb{N}\ \ u_{n+1}\geq 2u_n$

3) استنتج أن $\forall n\in\mathbb{N}\ \ u_n \geq 2^n$

4) احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

الجواب 1) ليكن n من $\mathbb{N}$ لدينا $u_{n+1}-u_n = u_n^2 \geq 0$

ومنه (u_n) تزايدية ولكل n من $\mathbb{N}$ $u_n \geq u_0$ أي $u_n \geq 1$

2) لدينا لكل n من $\mathbb{N}$ $u_n\geq 1$ إذن $u_n^2 \geq u_n$

ولدينا $u_{n+1}-2u_n = u_n+u_n^2-2u_n = u_n(u_n-1)\geq 0$

ومنه $\forall n\in\mathbb{N}\ \ u_{n+1}\geq 2u_n$

3) لدينا $\forall n\in\mathbb{N}\ \ u_{n+1}\geq 2u_n>0$

ومنه

$$\begin{cases} u_1 \geq 2u_0 > 0 \\ u_2 \geq 2u_1 > 0 \\ \text{---} \\ u_{n-1} \geq 2u_{n-2} > 0 \\ u_n \geq 2u_{n-1} > 0 \end{cases}$$

بضرب هذه المتفاوتات طرفا طرفا وبعد الإختزال نحصل على

(لأن $u_0=1$) $u_n \geq 2^n u_0$ أي $\forall n\in\mathbb{N}\ \ u_n\geq 2^n$

4) لنحدد $\lim_{n\to+\infty} u_n$

بما أن $\forall n\in\mathbb{N}\ \ u_n\geq 2^n$ و $\lim_{n\to+\infty} 2^n=+\infty$ فإن $\lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty$

تمارين للبحث

1

نعتبر المتتاليتين $(u_n)_{n\geq1}$ و $(v_n)_{n\geq1}$ المعرفتين بمايلي:

$u_n = 2^n - n$ و $v_n = \frac{n}{2^n}$ $\quad n\in\mathbb{N}^*$

1) بين أن $(u_n)_{n\geq1}$ تزايدية.

2) ادرس رتابة المتتالية $(v_n)_{n\geq1}$.

2

لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها r .

نضع $S_n = u_0+u_1+\dots\dots+u_n$

1) علما أن $u_0=-6$ و $r=4$ احسب u_{20} .

2) علما أن $u_{13}=67$ و $u_0=2$ احسب r .

3) علما أن $u_{51}=-145$ و $u_{20}=-52$ احسب u_n بدلالة n .

4) علما أن $u_0=-4$ و $r=3$ احسب S_{20} .

3

لتكن (v_n) متتالية هندسية أساسها q .

1) علما أن $v_0=32$ و $q=-\frac{1}{2}$ احسب v_6 و v_{12} .

2) علما أن $v_3=5$ و $v_7=405$ احسب v_n ثم S_n بدلالة n

بحيث $S_n = v_0+v_n+\dots\dots+v_{n-1}$

4

1) حدد الحد الأول و الأساس r لمتتالية حسابية (u_n)

بحيث: $u_3=\frac{12}{5}$ و $u_5=\frac{48}{5}$.

2) حدد الحد الأول v_0 والأساس q لمتتالية هندسية (v_n)

بحيث: $v_3=\frac{12}{5}$ و $v_4<0$ و $v_5=\frac{48}{5}$

5

حل في $\mathbb{R}$ النظمة التالية:

$$\begin{cases} a+b+c=\frac{19}{2} \\ \text{الأعداد } 2a \text{ و } b \text{ و } c-5 \text{ في هذا الترتيب تكون حدود متتالية حسابية} \\ \text{بحيث مجموعها يساوي } 9 \end{cases}$$

6

لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول $u_0 = -175$. حدد العدد r والعدد الصحيح الطبيعي n بحيث :

$u_n = 35$ و $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = -2170$

7

احسب المجاميع التالية بدلالة n

$$S_1 = 1 + 2 + \dots + n$$

$$S_2 = 1 + 3 + \dots + (2n+1)$$

$$S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

8

لتكن $(a_n)_{n \geq 1}$ متتالية حسابية موجبة قطعا .

1) احسب بدلالة n المجموع

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}$$

2) احسب $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{18}+\sqrt{19}}$

9

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بمايلي :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3} \end{cases}, n \in \mathbb{N}$$

1) احسب u_1 و u_2 و u_3 .

2) لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة بمايلي : $v_n = \frac{1}{1+u_n}$ ، $n \in \mathbb{N}$

بين أن (v_n) متتالية حسابية محددا أساسها وحدها الأول.

3) احسب v_n بدلالة n .

4) استنتج u_n بدلالة n .

5) احسب بدلالة n المجموع $v_0 + v_1 + \dots + v_n$

6) احسب المجموع $v_2 + v_3 + \dots + v_{11}$

10

حدد متتالية حسابية حيث مجموع حدودها الأولى يساوي 65 ومجموع مربعاتها يساوي 935

11

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بمايلي :

$$\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 - u_n} \end{cases}, n \in \mathbb{N}$$

1) أ- بين أن $u_n < 0$ ، $\forall n \in \mathbb{N}$.

ب- احسب u_1 و u_2 واستنتج أن (u_n) ليست حسابية

2) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة بمايلي : $v_n = \frac{1+u_n}{u_n}$ ، $n \in \mathbb{N}$

أ- احسب v_0 و v_1 و v_2 . هل يمكن استنتاج بأن (v_n) حسابية

ب- ليكن n من $\mathbb{N}$ احسب $v_{n+1} - v_n$.

ج- استنتج u_n بدلالة n .

12

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بمايلي :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3} \end{cases}, n \in \mathbb{N}$$

1) بين بالترجع أن $\forall n \in \mathbb{N} \quad -1 < u_n \leq 0$

2) ادرس رتابة المتتالية (u_n) .

3) بين أنه يوجد عدد حقيقي k بحيث : $\frac{1}{u_{n+1}+1} = k + \frac{1}{u_n+1}$

4) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة بمايلي : $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \frac{1}{u_n+1}$

أ- حدد طبيعة المتتالية (v_n)

ب- احسب v_n بدلالة n .

ج- استنتج u_n بدلالة n .

13

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بمايلي :

$$\begin{cases} u_0=1 \text{ و } u_1=3 \\ u_{n+2}=\frac{1}{2}a^2u_{n+1}+(a-3)u_n \quad , n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

حيث a عدد حقيقي .

نضع $\quad v_n=u_{n+1}-u_n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

1) نفترض أن $a=2$.

أ- بين أن (v_n) متتالية ثابتة ثم استنتج طبيعة المتتالية (u_n)

ب- احسب بدلالة n u_n و $u_0+u_1+---+u_n$

2) كيف يجب أن نختار العدد a لكي تكون (v_n) متتالية هندسية ؟

3) نفترض أن $a=-4$ ونضع $T_n=v_0+v_1+...+v_n$

أ- بين بالترجع أن $\quad T_n=u_{n+1}-1 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

ب- احسب u_n بدلالة n .

14

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بمايلي :

$$\begin{cases} u_0=1 \text{ و } u_1=3 \\ u_n=4(u_{n-1}-u_{n-2}) \quad , n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\} \end{cases}$$

ولتكن (v_n) المتتالية المعرفة بمايلي :

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad v_n=\frac{u_n}{2^n}$$

1) احسب u_2 و u_3 و v_0 و v_1 و v_2 .

2) أ- بين أن لكل n من $\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$ $\quad v_n-v_{n-1}=v_{n-1}-v_{n-2}$

ب- استنتج أن لكل n من $\mathbb{N}$ $\quad v_n=\frac{1}{2}(n+2)$

3) أ- احسب u_n بدلالة n .

ب- احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

15

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq1}$ المعرفة بمايلي :

$$\begin{cases} u_1=1 \\ u_{n+1}=u_n+\frac{1}{n+1} \quad , n\in\mathbb{N}^* \end{cases}$$

1) احسب u_2 و u_3 و u_4 .

2) أ- بين أن (u_n) متتالية تزايدية .

ب- بين أن $\quad u_{2n}\geq u_n+\frac{1}{2} \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

3) أ- بين بالترجع أن $\quad u_{2^n}\geq\frac{n}{2}+1 \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

ب- استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

16

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بمايلي :

$$\begin{cases} u_0=\frac{1}{2} \\ u_{n+1}=\frac{2u_n}{u_n+1} \quad , n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

1) احسب u_1 و u_2 .

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة بمايلي :

$$v_n=1-\frac{1}{u_n} \quad n\in\mathbb{N}$$

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية محدداً أساسها وحدها الأول

ب- احسب v_n ثم u_n بدلالة n .

ج- حدد $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

17

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بمايلي :

$$\begin{cases} u_0=a \text{ و } u_1=b \\ 3u_{n+1}=u_n+2u_{n-1} \quad , n\in\mathbb{N}^* \end{cases}$$

1) احسب u_2 و u_3 بدلالة a و b .

2) نضع $\quad v_n=u_{n+1}-u_n \quad n\in\mathbb{N}$

أ- احسب v_0 و v_1 و v_2 بدلالة $(b-a)$.

ب- بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=-\frac{2}{3}$

ج- احسب v_n بدلالة n و $(b-a)$.

د- احسب بدلالة n المجموع $S_n=v_0+v_1+---+v_n$

3) أ- بين أن $\quad u_n=u_0+S_n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

ب- استنتج u_n بدلالة n .

ج- احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

18

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بمايلي :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \quad \text{و} \quad u_2 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \quad , n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

1) احسب u_3 و u_4 .

2) بين أن بالترجع أن $u_n = \frac{\sqrt{5}}{5}(a^n - b^n)$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

حيث $a = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ و $b = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$

3) نعتبر المتتاليتين $(x_n)_{n\geq 1}$ و $(y_n)_{n\geq 1}$ المعرفتين بمايلي :

$x_n = a^n$ و $y_n = b^n$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

ادرس تقارب المتتاليتين .

4) لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة بمايلي :

$v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

بين أن المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ متقاربة نحو العدد a .

19

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بمايلي :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \dfrac{3+2u_n}{2+u_n} \quad , n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) احسب u_1 و u_2 .

2) بين أن $u_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

3) بين أن $u_n < \sqrt{3}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

4) بين أن المتتالية (u_n) تزايدية قطعا .

5) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة بمايلي :

$v_n = \frac{u_n - \sqrt{3}}{u_n + \sqrt{3}}$, $n \in \mathbb{N}$

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية محددا أساسها وحدها الأول

ب- احسب v_n بدلالة n ،

ج- حدد $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

د- احسب u_n بدلالة n.

هـ- حدد $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

20

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بمايلي :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{9}{2} \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 3n - \frac{9}{2} \quad , n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) احسب u_1 و u_2 .

2) نضع $v_n = u_n + \frac{9}{2}n$ $n \in \mathbb{N}$

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية محددا أساسها وحدها الأول.

ب- احسب v_n ثم u_n بدلالة n.

د- ادرس رتابة المتتالية (v_n) .

ج- احسب المجموع $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ بدلالة n.

21

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بمايلي :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n \quad , n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) احسب u_1 .

2) نضع $v_n = u_n - \left(\frac{3}{4}\right)^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

أ- بين (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{4}$.

ب- حدد v_n ثم u_n بدلالة n.

ج- حدد نهاية المتتالية (u_n) .

3) احسب بدلالة n المجموع $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

22

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بمايلي:

$u_0 = 4$ و $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + 3)$ $n \in \mathbb{N}$

ولتكن (v_n) المتتالية العددية بحيث $v_n = u_n - 3$ $n \in \mathbb{N}$

1) بين أن (v_n) هندسية محددا أساسها والحد الأول .

2) أ- استنتج أن $u_n = 3 + \frac{1}{3^n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

ب- بين أن (u_n) متتالية تناقصية ومصغورة بالعدد 3 .

3) نضع $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ $n \in \mathbb{N}$

أ- بين أن $S_n = 3n + 5 - \frac{1}{2^n}$ $n \in \mathbb{N}$

ب- احسب $\lim S_n$.

23

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بمايلي :

$$u_0 = 0 \quad \text{و} \quad u_{n+1} = \sqrt{8 + \frac{u_n^2}{3}} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

1) احسب u_1 .

2) أ- بين بالترجع أن $0 \leq u_n < 2\sqrt{3}$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$

ب- بين أن (u_n) تزايدية قطعًا .

ج- استنتج أن (u_n) متقاربة .

3) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة بمايلي: $v_n = 12 - u_n^2$ $\quad n \in \mathbb{N}$

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية محددًا أساسها وحدها الأول.

ب- احسب v_n ثم u_n بدلالة n .

ج- احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

24

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بمايلي :

$$u_1 = 1 \quad \text{و} \quad u_0 = 0 \quad \text{و} \quad u_{n+2} = \frac{1}{7}(8u_{n+1} - u_n) \qquad n \in \mathbb{N}$$

ولتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة بمايلي :

$$v_n = u_{n+1} - u_n \qquad n \in \mathbb{N}$$

1) أ- احسب u_2 و v_0 .

ب- بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{7}$.

2) أ- احسب بدلالة n المجموع $v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$

ب- استنتج أن $u_n = \frac{7}{6} - \frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{7}\right)^{n-1}$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$

ثم احسب $\lim u_n$.

25

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \geq 1}$ المعرفة بمايلي :

$$u_1 = \frac{7}{3} \quad \text{و} \quad u_{n+1} = \frac{7u_n + 3}{3u_n + 7} \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

1) أ- بين أن $u_n \geq 1$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

ب- بين أن (u_n) تناقصية واستنتج أنها متقاربة .

2) لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية ثم اكتب v_n بدلالة n .

ب- استنتج أن $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $u_n = \frac{5^n + 2^n}{5^n - 2^n}$ ثم احسب $\lim u_n$

26

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \geq 1}$ المعرفة بمايلي :

$$u_1 = \frac{2}{3} \quad \text{و} \quad u_{n+1} = \frac{2n+2}{3n} u_n \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

ونضع $v_n = \frac{1}{n} u_n$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

1) احسب u_2 .

2) أ- بين أن المتتالية (v_n) هندسية .

ب- اكتب v_n ثم u_n بدلالة n .

3) احسب بدلالة n المجموع $S_n = \frac{u_1}{1} + \frac{u_2}{2} + \frac{u_3}{3} + \cdots + \frac{u_n}{n}$

27

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بمايلي :

$$u_0 = 0 \quad \text{و} \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - n - \frac{1}{2} \qquad n \in \mathbb{N}$$

1) احسب u_1 .

2) أ- بين بالترجع أن $u_n \geq -2n - 1$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$

ب- بين أن المتتالية (u_n) تناقصية .

3) نضع $v_n = 2u_n + 4n - 6$ $\quad n \in \mathbb{N}$

أ- بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

ب- استنتج أن $u_n = 3 - 2n - 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$

ج- حدد نهاية المتتالية (u_n) .

28

نعتبر المتتاليتين العدديتين (a_n) و (b_n) المعرفتين بمايلي :

$$n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} a_0 = 3 \quad \text{و} \quad b_0 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n + 1 \\ b_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{2}{3}b_n + 1 \end{cases}$$

1) لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة ب : $u_n = a_n - b_n$ $\quad n \in \mathbb{N}$

أ- بين أن (u_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$.

ب- اكتب u_n بدلالة n ثم استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

2) لتكن $(v_n)_{n \geq 1}$ المتتالية العددية المعرفة ب : $v_n = \frac{a_n + b_n}{n}$ $\quad n \in \mathbb{N}^*$

أ- بين أن $v_n \geq 2$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

ب- بين أن $v_{n+1} = \frac{2 - v_n}{n+1} + v_n$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

ثم استنتج رتابة المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$.

ج - بين أن المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ متقاربة وأن نهايتها l موجبة قطعا

3) احسب كلا من a_n و b_n بدلالة u_n و v_n

ثم احسب نهايتي المتتاليتين (a_n) و (b_n) .

29

نعتبر المتتاليتين العدديتين $(u_n)_{n\geq 1}$ و $(v_n)_{n\geq 1}$ المعرفتين بمايلي :

$$\begin{cases} u_1 = v_1 = 1 \\ 3u_n - v_{n-1} = \frac{2-n}{n-1} \\ u_n - v_n = -1 + \frac{1}{n} \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$$

1) أ- احسب u_2 و v_2 .

ب- بين أن (i_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$.

ج- احسب u_n ثم v_n بدلالة n من $\mathbb{N}^*$.

2) أ- باستعمال النتيجة $3^{n-1} \geq n$ لكل n من $\mathbb{N}^*$، تحقق من أن :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n \leq \frac{1}{n}$$

ب- بين أن $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 1 - \frac{1}{n} \leq v_n \leq 1$

ج- استنتج أن المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ متقاربة وحدد نهايتها .

30

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بمايلي :

$$u_0 = \frac{10}{3} \quad \text{و} \quad u_{n+1} = \frac{1}{u_n}(u_n^2 - 3u_n + 9) \quad n \in \mathbb{N}$$

1) احسب u_1 .

2) بين أن $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 3$

3) أ- بين أن المتتالية (u_n) تناقصية وأن لكل n من $\mathbb{N}$ $3 < u_n \leq \frac{10}{3}$

ب- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة .

4) أ- بين أن لكل n من $\mathbb{N}$ $u_{n+1} - 3 \leq \frac{1}{3}(u_n - 3)$

ب- استنتج أن لكل n من $\mathbb{N}$ $0 < u_n - 3 \leq (\frac{1}{3})^{n+1}$

ج- حدد نهاية المتتالية (u_n) .

31

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بمايلي :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \quad \text{و} \quad u_1 = 1 \\ u_{n+2} = \frac{2}{3}u_{n+1} - \frac{1}{9}u_n \quad , n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

نضع $T_n = u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n$ و $H_n = 3^n \times u_n$ $n \in \mathbb{N}$

1) احسب u_2 و T_0 و H_0 .

2) أ- بين أن (T_n) متتالية هندسية محددا أساسها .

ب- حدد T_n بدلالة n .

3) أ- بين أن (H_n) متتالية حسابية محددا أساسها .

ب- حدد H_n بدلالة n .

4) احسب بدلالة n المجموعين :

$$S_n = T_0 + T_1 + \dots + T_n$$
$$W_n = 3.u_1 + 3^2.u_2 + \dots + 3^n.u_n$$

5) بين أن لكل n من $\mathbb{N}^*$ $0 < u_n \leq (\frac{2}{3})^{n-1}$

6) حدد النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

32

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $]0,2[$ بمايلي :

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 2x}$$

1) بين أن الدالة f متصلة ورتيبة قطعا على $]0,2[$.

2) حدد $f(]0,2[)$.

3) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بمايلي :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \sqrt[3]{u_n^2 + 2u_n} \quad , n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

أ- بين أن $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < u_n < 2$

ب- بين أن (u_n) متتالية تزايدية .

ج- استنتج أن (u_n) متقاربة وحدد نهايتها .

33 نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بمايلي :

$u_0=\frac{3}{2}$ و $u_{n+1}=\frac{u_n^2+1}{2u_n}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

1) احسب u_1 و u_2 .

2) أ- بين بالترجع أن $u_n>1$ $\forall n\in\mathbb{N}$

ب- بين أن المتتالية (u_n) تناقصية .

3) أ- أثبت أن لكل n من $\mathbb{N}$ $u_{n+1}-1\leq\frac{1}{2}(u_n-1)$

ب- استنتج أن لكل n من $\mathbb{N}$ $u_n-1\leq\frac{1}{2^n}$

ج- حدد نهاية المتتالية (u_n) .

34 نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بمايلي :

$u_0\in]-1,0[$ و $u_{n+1}=\frac{u_n}{\sqrt{2+u_n}}$ $n\in\mathbb{N}$

1) بين أن $-1<u_n<0$ $\forall n\in\mathbb{N}$

2) بين أن المتتالية (u_n) تزايدية قطعاً .

3) أ- بين أن $u_{n+1}\geq\frac{u_n}{\sqrt{2+u_0}}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

ب- استنتج أن $u_n\geq\frac{u_0}{(\sqrt{2+u_0})^n}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

4) حدد نهاية المتتالية (u_n) .

35 نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بمايلي :

$u_0=2$ و $u_{n+1}=\sqrt{\frac{1}{2}u_n^2+1}$ $n\in\mathbb{N}$

1) احسب u_1 و u_2 .

2) لتكن (v_n) المتتالية المعرفة بمايلي :

$v_n=u_n^2-2$ $\forall n\in\mathbb{N}$

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية وحدد أساسها وحدها الأول .

ب- استنتج u_n بدلالة n

3) أ- بين أن $\sqrt{1+x}\leq 1+\frac{x}{2}$ $\forall x\in\mathbb{R}^+$

ب- استنتج أن $\sqrt{2}\leq u_n\leq\sqrt{2}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$ $\forall n\in\mathbb{N}$

ج- حدد نهاية المتتالية (u_n)

36 نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بمايلي :

$u_0=1$ و $u_{n+1}=\sqrt{\frac{1}{2}u_n+\frac{3}{2}}$ $n\in\mathbb{N}$

1) أثبت أن $1\leq u_n\leq\frac{3}{2}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

2) بين أن (u_n) متتالية تزايدية واستنتج أن (u_n) متقاربة وحدد نهايتها.

37 نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بمايلي :

$u_0=\frac{1}{2}$ و $u_{n+1}=\frac{1}{2}(3u_n^2-4u_n+3)$ $n\in\mathbb{N}$

1) أ- احسب u_1 .

ب- ادرس رتابة المتتالية (u_n)

2) بين أن (u_n) مكبورة بالعدد 1 .

3) استنتج أن (u_n) متقاربة وحدد نهايتها .

38 نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بمايلي :

$$\begin{cases} u_0=0 \text{ و } u_1=1 \\ u_{n+1}=u_n+2u_{n-1} \quad , n\in\mathbb{N}^* \end{cases}$$

نضع $v_n=u_{n+1}-u_n$ و $w_n=-\frac{1}{2}u_{n+1}+u_n$

1) بين أن (v_n) متتالية هندسية وحدد v_n بدلالة n .

2) بين أن (w_n) متتالية هندسية وحدد w_n بدلالة n .

3) استنتج u_n بدلالة n ثم حدد $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

4) بين أن $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{3}\left(2^n+2(-1)^n\right)$ $\forall n\in\mathbb{N}$

ثم ادرس رتابة المتتالية (u_n)

39

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بمايلي $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} \end{cases}$ $n\in\mathbb{N}$

1) أ- أثبت أن $\forall n\in\mathbb{N} \quad \frac{1}{2}\le u_n\le 1$

ب- استنتج أن $\forall n\in\mathbb{N} \quad \frac{3}{2}\le 1+\sqrt{u_n}$

2) أثبت أن (u_n) متتالية تزايدية.

3) أ- بين أن $\forall n\in\mathbb{N} \quad 1-u_{n+1}\le\frac{2}{3}(1-u_n)$

ب- بين أن $\forall n\in\mathbb{N} \quad 0\le 1-u_n\le \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$

4) أثبت أن المتتالية (u_n) متقاربة وحدد نهايتها.

40

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بمايلي:

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{1+u_n^2} \end{cases} ,n\in\mathbb{N}$$

1) احسب u_1 و u_2.

2) أ- أثبت أن $\forall n\in\mathbb{N} \quad 0<u_n<1$

ب- بين أن المتتالية (u_n) تزايدية ثم استنتج أن $\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n\ge\frac{1}{2}$

3) أ- بين أن $\forall n\in\mathbb{N} \quad 1-u_{n+1}\le\frac{2}{5}(1-u_n)$

ب- استنتج أن $\forall n\in\mathbb{N} \quad 1-u_n\le\left(\frac{2}{5}\right)^n(1-u_0)$

4) بين أن المتتالية (u_n) متقاربة وحدد نهايتها.

41

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\ge1}$ المعرفة بمايلي:

$$u_1 = 1 \quad و \quad u_{n+1} = 2u_n + \frac{n+2}{n(n+1)} \quad ,n\in\mathbb{N}^*$$

نضع $v_n = u_n + \frac{1}{n}$ $\quad n\in\mathbb{N}^*$

1) حدد u_2 و v_1 و v_2.

2) بين أن (v_n) متتالية هندسية وحدد أساسها.

3) احسب v_n ثم u_n بدلالة n.

4) ادرس رتابة المتتالية (u_n).

5) ادرس تقارب المتتالية (u_n).

42

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بمايلي:

$$u_{n+1} = \frac{1}{16}\left(1+u_n+8\sqrt{1+u_n}\right) ,n\in\mathbb{N} \quad و \quad u_0=0$$

نضع $v_n = \sqrt{1+u_n}$ $\quad n\in\mathbb{N}$

1) حدد u_1 و u_2 و v_0 و v_2 و v_3.

2) احسب v_{n+1}^2 بدلالة v_n واستنتج أن $v_{n+1}=\frac{1}{4}(v_n+4)$

3) لتكن $w_n = v_n - \frac{4}{3}$ $\quad n\in\mathbb{N}$

أ- بين أن (w_n) متتالية هندسية واستنتج u_n و v_n بدلالة n

ب- ادرس تقارب المتتالية (u_n).

43

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي:

$$f(x) = x\sqrt{1+x^2} - x^2$$

ليكن (C_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ثم ادرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى (C_f).

2) بين أن $\forall x\in\mathbb{R} \quad f'(x) = \frac{(\sqrt{1+x^2}-x)^2}{\sqrt{1+x^2}}$

ثم أنجز جدول تغيرات f.

3) أ- اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) في النقطة التي أفصولها 0.

ب- بين أن $\forall x\in\mathbb{R} \quad f(x)\le x$

أوّل هندسيا هذه النتيجة.

ج- أنشئ المنحنى (C_f).

4) أ- بين أن f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو مجال J ينبغي تحديده.

ب- بين أن $\forall x\in J \quad f^{-1}(x) = \frac{x}{\sqrt{1-2x}}$

ج- انشئ المنحنى $(C_{f^{-1}})$ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

5) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بمايلي:

$$\begin{cases} u_0 = -\frac{3}{4} \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad ,n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

أ- بين أن (u_n) متتالية تناقصية.

ب- استنتج أن $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n \le -\frac{3}{4}$

وأن $\forall n\in\mathbb{N}\quad \sqrt{1+u_n^2}-u_n \ge 2$

ج- بين أن $\forall n\in\mathbb{N}\quad |u_{n+1}|\ge 2|u_n|$

واستنتج أن $\forall n\in\mathbb{N}\quad |u_n|\ge \frac{3}{4}\cdot 2^n$

د- حدد نهاية المتتالية (u_n).

44

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي:

$$f(x)=\left(\frac{4\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}\right)^2$$

1) حدد حيز تعريف الدالة f : D_f ثم احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

2) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f في النقطة $x_0=0$ على اليمين وأول هندسيا النتيجة المحصل عليها.

3) احسب $f'(x)$ من أجل $x>0$ واعط جدول تغيرات الدالة f

4) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم $(\Delta): y=x$

5) أ- ادرس تقعر المنحنى (C_f)

ب- أنشئ المنحنى (C_f) في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

6) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بمايلي:

$$\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=f(u_n) \quad , n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

أ- أثبت أن $\forall n\in\mathbb{N}\quad 0<u_n<4$

ب- ادرس رتابة المتتالية (u_n).

ج- نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة بمايلي:

$$n\in\mathbb{N}\quad v_n = 1-\frac{2}{\sqrt{u_n}}$$

بين أن (v_n) متتالية هندسية وحدد v_n ثم u_n بدلالة n

- احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$

45

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بمايلي:

$$u_n=\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$$

1) بين أن $\forall k\in\mathbb{N}\quad \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$

2) ادرس تقارب المتتالية (u_n).

46

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ المعرفة بمايلي:

$$u_n=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}$$

1) احسب u_1 و u_2 و u_3

2) بين أن $\forall k\in\mathbb{N}^*\quad \frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$

3) أ- حدد u_n بدلالة n

ب- حدد $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

47

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ المعرفة بمايلي:

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

1) بين أن $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\le u_n\le\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

2) استنتج نهاية المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$.

48

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\ge1}$ المعرفة بمايلي:

$$u_n=\frac{n}{n^2}+\frac{n}{n^2+1}+\dots+\frac{n}{(n+1)^2}$$

1) بين أن $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad \frac{n(2n+2)}{(n+1)^2}\le u_n\le\frac{2n+2}{n}$

2) استنتج نهاية المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$

دالـــة اللوغاريتم النيبـــري

دالة اللوغاريتم النبيري

- دالة اللوغاريتم النبيري.

الدالة الأصلية للدالة $t \mapsto \frac{1}{t}$ على المجال $]0;+\infty[$ والتي تنعدم في النقطة $t_0=1$ تسمى دالة اللوغاريتم النبيري ويرمز لها ب: $\ln$ أو Log.

وبتعبير آخر: $f(x)=\ln x \iff (x>0$ و $f'(x)=\frac{1}{x}$ و $f(1)=0)$

- خاصيات:

ليكن x و y عنصرين من $\mathbb{R}^{*+}$ و r عنصراً من $\mathbb{Q}$ لدينا:

$$\ln(1)=0 \quad \text{و} \quad (\ln x)'=\frac{1}{x}$$

$$\ln x=\ln y \iff x=y$$

$$\ln x<\ln y \iff x<y$$

$$\ln(xy)=\ln x+\ln y$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right)=\ln x-\ln y$$

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right)=-\ln x$$

$$\ln(x^r)=r\ln x$$

- النهايات الهامة:

$$\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty \quad ; \quad \lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\ln x=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0 \quad ; \quad \lim_{\substack{x\to0\\x>0}}x\ln x=0^-$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1 \quad ; \quad \lim_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}=0 \quad ; \quad \lim_{\substack{x\to0\\x>0}}x^n\ln x=0$$

$$(n\in\mathbb{N}^*)$$

• عدد النيبري :

عدد النيبري هو حل المعادلة : $\ln x = 1$ ويرمز له ب : e

حيث : $e \simeq 2{,}71828$ و $\ln e = 1$

• الإشتقاق :

إذا كانت u دالة قابلة للإشتقاق على مجال I بحيث : $(\forall x \in I)\quad u(x) \neq 0$

فإن الدالة $x \mapsto \ln|u(x)|$ قابلة للإشتقاق على I

و $(\forall x \in I)\quad (\ln|u(x)|)' = \frac{u'(x)}{u(x)}$

و الدوال الأصلية للدالة $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ على المجال I

هي الدوال $x \mapsto \ln|u(x)| + k$ حيث : $k \in \mathbb{R}$.

الدوال اللوغاريتمية للأساس a

• الدالة : $x \mapsto \frac{\ln x}{\ln a}$ المعرفة على $]0;+\infty[$ $(a>1; a\neq 0)$

تسمى دالة اللوغاريتمية للأساس a ويرمز لها ب : $\log_a$

$$\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$$

• خاصيات :

ليكن x و y عنصرين من $]0;+\infty[$ و r عنصراً من $\mathbb{Q}$ لدينا :

$\log_a(1) = 0$ ، $\log_a(a) = 1$

$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$

$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$

$\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$

$\log_a(x^r) = r \log_a(x)$

• دالة اللوغاريتم العشري .

إذا كانت $a = 10$ فإن الدالة $\log_{10}$ نسمي دالة اللوغاريتم العشري

ويرمز لها ب : $\log$. $\log 10 = 1$

$(\forall x \in]0;+\infty[)\quad \log(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$

• ليكن x عنصراً من $]0;+\infty[$ و n عنصراً من $\mathbb{N}^*$

$\ln(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n} \ln x$

$\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \ln x$

$\ln(\sqrt[3]{x}) = \frac{1}{3} \ln x$

• إذا كان n عدداً زوجياً ولكل x من $\mathbb{R}^*$ فإن $\ln x^n = n \ln|x|$

• أخطاء شائعة يجب تجنبها .

$\ln(x-y) = \frac{\ln x}{\ln y}$

$\ln x^n \neq n \ln x$ (على العموم)

$(\ln x)(\ln y) \neq \ln(x+y)$

$(\ln x)(\ln y) \neq \ln(x) - \ln(y)$

1

نضع : $a = \ln 2$ و $b = \ln 2$

احسب بدلالة a و b التعابير التالية .

$A = \ln(24)$ ، $B = \ln(-3)^2$

$C = \ln(\sqrt[3]{18})$ ، $D = \ln\left(\frac{32}{9}\right)$

الجواب

$A=\ln(24)=\ln(8\times3)=\ln(2^3\times3)$

$A=\ln 2^3+\ln 3=3\ln2+\ln3=3a+b$

$B=\ln(-3)^2=2\ln|-3|=2\ln3=2b$

$C=\ln(\sqrt[3]{18})=\frac{1}{3}\ln18=\frac{1}{3}\ln(3^2\times2)$

$C=\frac{1}{3}(\ln3^2+\ln2)=\frac{1}{3}(2\ln3+\ln2)=\frac{1}{3}(2b+a)$

$D=\ln\left(\frac{32}{9}\right)=\ln32-\ln9=\ln2^5-\ln3^2$

$D=5\ln2-2\ln3=5a-2b$

2 نضع $:\ln 2$ و $b=\ln 3$

$A=\ln\left(16\sqrt{\frac{4}{3}}\right)$ $\quad B=\ln\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\ln4+4\ln\sqrt2$

$C=\ln\sqrt[3]{\frac{\sqrt3}{8}}$ $\quad D=\ln\left(\frac{16\sqrt6}{9}\right)^2$

الجواب

$A=\ln\left(16\sqrt{\frac{4}{3}}\right)=\ln16+\ln\sqrt{\frac{4}{3}}$

$A=\ln2^4+\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}=4\ln2+\frac{1}{2}(\ln2^2+\ln3)$

$A=4\ln2+\frac{1}{2}(2\ln2+\ln3)=5\ln2+\frac{1}{2}\ln3$

$A=5a+\frac{1}{2}b$

$B=\ln\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\ln4+4\ln\sqrt2=-\ln2^3+\frac{1}{2}\ln2^2+4\times\frac{1}{2}\ln2$

$B=-3\ln2+\ln2+2\ln2=0$

$C=\ln\sqrt[3]{\frac{\sqrt3}{8}}=\frac{1}{3}\ln\frac{\sqrt3}{8}=\frac{1}{3}(\ln\sqrt3-\ln8)$

$C=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\ln3-\ln2^3\right)=\frac{1}{6}\ln3-\ln2=\frac{1}{6}b-a$

$D=\ln\left(\frac{16\sqrt6}{9}\right)^2$

$D=2\ln\left(\frac{16\sqrt6}{9}\right)$

$D=2(\ln16\sqrt6-\ln9)$

$D=2(\ln16+\ln\sqrt6-\ln3^2)$

$D=2(\ln2^4+\frac{1}{2}(\ln3+\ln2)-3\ln3)=2(4\ln2-\frac{5}{2}\ln3+\frac{1}{2}\ln2)$

$D=9\ln2-5\ln3=9a-5b$

3 نضع : $A=\frac{7}{16}\ln(3+2\sqrt2)-4\ln(\sqrt2+1)-\frac{25}{8}\ln(\sqrt2-1)$

1) بين أن $\ln(\sqrt2+1)(\sqrt2-1)=0$

2) بين أن $2\ln(\sqrt2+1)=\ln(3+2\sqrt2)$

3) استنتج أن $A=0$

الجواب

1) لدينا $\ln(\sqrt2+1)(\sqrt2-1)=\ln((\sqrt2)^2-1)=\ln(1)=0$

2) لدينا $2\ln(\sqrt2+1)=\ln(\sqrt2+1)^2=\ln(2+2\sqrt2+1)$

ومنه $2\ln(\sqrt2+1)=\ln(3+2\sqrt2)$

3) لدينا $A=\frac{7}{16}\ln(3+2\sqrt2)-4\ln(\sqrt2+1)-\frac{25}{8}\ln(\sqrt2-1)$

$A=\frac{7}{16}\ln(\sqrt2+1)^2-4\ln(\sqrt2+1)-\frac{25}{8}\ln(\sqrt2-1)$

$=\frac{14}{16}\ln(\sqrt2+1)-4\ln(\sqrt2+1)-\frac{25}{8}\ln(\sqrt2-1)$

$=\frac{7}{8}\ln(\sqrt2+1)-4\ln(\sqrt2+1)-\frac{25}{8}\ln(\sqrt2-1)$

$=-\frac{25}{8}\ln(\sqrt2+1)-\frac{25}{8}\ln(\sqrt2-1)$

$=-\frac{25}{8}(\ln(\sqrt2+1)+\ln(\sqrt2-1))$

$=-\frac{25}{8}\ln(\sqrt2+1)(\sqrt2-1)=-\frac{25}{8}\times0$

ومنه $A=0$

4 بين أن x ينتمي إلى $\mathbb{R}$ في كل حالة من الحالات التالية:

1) $\ln x=\ln(\sqrt2+1)+\ln(\sqrt2-1)+\ln2$

2) $\ln x=2\ln5+3\ln2-\ln20$

3) $\ln x=\ln(2+\sqrt3)-\ln(2-\sqrt3)+\ln(7-4\sqrt3)$

تذكير

لكل x و y من $]0,+\infty[$ لدينا :

$\ln(x)=\ln(y) \iff x=y$

$\ln(x)=0 \iff x=1$

لكل λ من $\mathbb{R}$. $\ln e^{\lambda}=\lambda$

$\ln x=a \iff x=e^{a}$

$\ln x>a \iff x>e^{a}$

$\ln x<a \iff 0<x<e^{a}$

$\ln x=-1 \iff x=\frac{1}{e}$

$\ln x=\frac{1}{2} \iff x=\sqrt{e}$

ملاحظة $\ln x=-4$ له معنى.

$\ln(-4)$ ليس له معنى.

يمكن لـ $\ln x$ أن يكون سالبًا مع $x>0$.

الجواب 1) لدينا $\ln x=\ln(\sqrt{2}+1)+\ln(\sqrt{2}-1)+\ln 2$

$\ln x=\ln[(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)2]$

$\ln x=\ln(2(2-1))=\ln 2$

ومنه $x=2$

2) لدينا $\ln x=2\ln 5+3\ln 2-\ln 20$

$\ln x=\ln 5^{2}+\ln 2^{3}-\ln 20$

$\ln x=\ln\frac{5^{2}\times 2^{3}}{20}=\ln\frac{25\times 8}{20}=\ln 10$

ومنه $x=10$

3) لدينا $\ln x=\ln(2+\sqrt{3})-\ln(2-\sqrt{3})+\ln(7-4\sqrt{3})$

$\ln x=\ln\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\right)+\ln(7-4\sqrt{3})$

$\ln x=\ln(2+\sqrt{3})^{2}+\ln(7-4\sqrt{3})=\ln(7+4\sqrt{3})+\ln(7-4\sqrt{3})$

$\ln x=\ln(7-4\sqrt{3})(7+4\sqrt{3})=\ln(49-48)=\ln 1$

ومنه $x=1$

المعادلات

5 حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

(1) $\ln x=-2$

(2) $\ln x^{2}=4$

(3) $\ln\sqrt{1-x}=\frac{1}{2}\ln 3$

(4) $(\ln(1-x))^{2}=9$

الجواب لتكن S_i مجموعة حلول المعادلة (i).

1) لدينا

$x\in S_1 \iff \ln x=-2$

$\iff x=e^{-2}$

ومنه $S_1=\{e^{-2}\}$

2) لدينا

$x\in S_2 \iff \ln x^{2}=4$

$\iff x^{2}=e^{4} \iff x=-\sqrt{e^{4}}$ أو $x=\sqrt{e^{4}}$

$\iff x=-e^{2}$ أو $x=e^{2}$

ومنه $S_2=\{-e^{2}, e^{2}\}$

3) لدينا

$x\in S_3 \iff \ln\sqrt{1-x}=\frac{1}{2}\ln 3$

$\iff \ln\sqrt{1-x}=\ln\sqrt{3}$

$\iff \sqrt{1-x}=\sqrt{3} \iff 1-x=3$

$\iff x=-2$

ومنه $S_3=\{-2\}$

4) لدينا

$x\in S_4 \iff (\ln(1-x))^{2}=9$

$\iff \ln(1-x)=-3$ أو $\ln(1-x)=3$

$\iff 1-x=e^{-3}$ أو $1-x=e^{3}$

$\iff x=1-e^{-3}$ أو $x=1-e^{3}$

ومنه $S_4=\{1-e^{-3}, 1-e^{3}\}$

6 حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

(1) $\ln(2x-3)+\ln(x-4)=2\ln 2+\ln 3$

(2) $\ln\left(\frac{x+7}{x+1}\right)=\ln(x+3)$

(3) $\ln\sqrt{x+1}=\ln(3-x)-\frac{1}{2}\ln 2x$

(4) $\ln|x+4|+\ln|x-2|=\ln 7$

الجواب: لتكن S_i مجموعة حلول المعادلة (i)

D_i مجموعة تعريف المعادلة (i)

1) لدينا $(1)\ \ln(2x-3)+\ln(x-4)=2\ln 2+\ln 3$

$x\in D_1 \Leftrightarrow 2x-3>0$ و $x>4$

$\Leftrightarrow x>\frac{3}{2}$ و $x>4$

ومنه $D_1=]4,+\infty[$

ولدينا $x\in S_1 \Leftrightarrow \ln(2x-3)+\ln(x-4)=2\ln 2+\ln 3$

$\Leftrightarrow \ln(2x-3)(x-4)=\ln 2^2\times 3$ و $x\in D_1$

$\Leftrightarrow \ln(2x^2-11x+12)=\ln 12$ و $x\in D_1$

$\Leftrightarrow 2x^2-11x+12=12$ و $x\in D_1$

$\Leftrightarrow 2x^2-11x=0$ و $x\in D_1$

$\Leftrightarrow x(2x-11)=0$ و $x\in D_1$

$\Leftrightarrow x=0\notin D_1$ أو $x=\frac{11}{2}\in D_1$

ومنه $S_1=\left\{\frac{11}{2}\right\}$

2) لدينا $(2)\ \ln\left(\frac{x+7}{x+1}\right)=\ln(x+3)$

$x\in D_2 \Leftrightarrow x+1\neq 0$ و $\frac{x+7}{x+1}>0$ و $x+3>0$

x	$-\infty$		-7		-1		$+\infty$
$x+7$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{x+7}{x+1}$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

إذن $D_2=(]-\infty,-7[\cup]-1,+\infty[)\cap(]-3,+\infty[)$

ومنه $D_2=]-1,+\infty[$

ولدينا $x\in S_2 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x+7}{x+1}\right)=\ln(x+3)$

$\Leftrightarrow \frac{x+7}{x+1}=x+3$ و $x\in D_2$

$\Leftrightarrow x+7=(x+3)(x+1)$ و $x\in D_2$

$\Leftrightarrow x+7=x^2+4x+3$ و $x\in D_2$

$\Leftrightarrow x^2+3x-4=0$ و $x\in D_2$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+4)=0$ و $x\in D_2$

$\Leftrightarrow (x=1$ أو $x=-4)$ و $x\in D_2$

$\Leftrightarrow x=1$ (لأن $-4\notin D_2$)

ومنه $S_2=\{1\}$

3) لدينا $(3)\ \ln(\sqrt{x+1})=\ln(3-x)-\frac{1}{2}\ln 2x$

$x\in D_3 \Leftrightarrow x+1>0$ و $3-x>0$ و $2x>0$

$\Leftrightarrow x>-1$ و $x<3$ و $x>0$

ومنه $D_3=]0,3[$

ولدينا $x\in S_3 \Leftrightarrow \ln\sqrt{x+1}=\ln(3-x)-\frac{1}{2}\ln 2x$

$\Leftrightarrow \ln\sqrt{x+1}=\ln(3-x)-\ln\sqrt{2x}$

$\Leftrightarrow \ln\sqrt{x+1}=\ln\frac{3-x}{\sqrt{2x}}$ و $x\in D_3$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}=\frac{3-x}{\sqrt{2x}}$ و $x\in D_3$

$\Leftrightarrow 2x(x+1)=(3-x)^2$ و $x\in D_3$

$\Leftrightarrow 2x^2+2x=9-6x+x^2$ و $x\in D_3$

$\Leftrightarrow x^2+8x-9=0$ و $x\in D_3$

$\Leftrightarrow x=1\in D_3$ أو $x=-9\notin D_3$

ومنه $S_3=\{1\}$

4) لدينا (4) $\ln|x+4| + \ln|x-2| = \ln 7$

ولدينا $x \in D_4 \Leftrightarrow |x+4|>0$ و $|x-2|>0$

$\Leftrightarrow x+4 \neq 0$ و $x-2 \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq -4$ و $x \neq 2$

ومنه $D_2 = \mathbb{R} \setminus \{-4;2\}$

لدينا $x \in S_4 \Leftrightarrow \ln|x+4| + \ln|x-2| = \ln 7$

$\Leftrightarrow \ln|x+4||x-2| = \ln 7$ و $x \in D_4$

$\Leftrightarrow |(x+4)(x-2)| = 7$ و $x \in D_4$

$\Leftrightarrow |x^2+2x-8| = 7$ و $x \in D_4$

$\Leftrightarrow (x^2+2x-8=-7$ أو $x^2+2x-8=7)$ و $x \in D_4$

$\Leftrightarrow (x^2+2x-1=0$ أو $x^2+2x-15=0)$ و $x \in D_4$

$\Leftrightarrow (x=1-\sqrt{5}$ أو $x=1+\sqrt{5}$ أو $x=-5$ أو $x=3)$ و $x \in D_4$

ومنه $S_4 = \{1-\sqrt{5}, 1+\sqrt{5}, -5, 3\}$

7

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

(1) $\ln^2|x| - 2\ln|x| = 0$

(2) $\ln^2(x) - 5\ln(x) + 6 = 0$

(3) $\ln(x) - \frac{1}{\ln(x)} = \frac{15}{4}$

(4) $\ln|\sin x| + \ln|\tan x| - \ln|\cos x| = 0$

الجواب لتكن S_i مجموعة حلول المعادلة (i)

D_i مجموعة تعريف المعادلة (i)

1) لدينا (1) $\ln^2|x| - 2\ln|x| = 0$

$x \in D_1 \Leftrightarrow |x|>0 \Leftrightarrow |x| \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$

ومنه $D_1 = \mathbb{R}^*$

ولدينا $x \in S_1 \Leftrightarrow \ln^2|x| - 2\ln|x| = 0$

$\Leftrightarrow \ln|x|(\ln|x|-2) = 0$

$\Leftrightarrow \ln|x| = 0$ أو $\ln|x| = 2$

$\Leftrightarrow (|x| = e^0 = 1$ أو $|x| = e^2)$ و $x \in D_1$

$\Leftrightarrow x=-1$ أو $x=1$ أو $x=-e^2$ أو $x=e^2$

ومنه $S_1 = \{-1, 1, -e^2, e^2\}$

2) لدينا (2) $\ln^2(x) - 5\ln(x) + 6 = 0$

$x \in D_2 \Leftrightarrow x>0$

ومنه $D_2 =]0,+\infty[$

نضع $X = \ln(x)$ إذن المعادلة (2) تصبح

(2)' $X^2 - 5X + 6 = 0$

$\Leftrightarrow (X-3)(X-2) = 0 \Leftrightarrow X=3$ أو $X=2$

ومنه $\ln(x) = 3$ أو $\ln(x) = 2$

$\Leftrightarrow x = e^3$ أو $x = e^2$

إذن $S_2 = \{e^2, e^3\}$

3) لدينا (3) $\ln(x) - \frac{1}{\ln(x)} = \frac{15}{4}$

$x \in D_3 \Leftrightarrow x>0$ و $\ln(x) \neq 0$

$\Leftrightarrow x>0$ و $x \neq 1$

ومنه $D_3 =]0,1[\cup]1,+\infty[$

ولدينا $x \in S_3 \Leftrightarrow \ln(x) - \frac{1}{\ln(x)} = \frac{15}{4}$

$\Leftrightarrow \ln^2(x) - \frac{15}{4}\ln x - 1 = 0$ و $x \in D_3$

$\Leftrightarrow (\ln(x) - 4)(\ln(x) + \frac{1}{4}) = 0$ و $x \in D_3$

$\Leftrightarrow (\ln(x) = 4$ أو $\ln(x) = -\frac{1}{4})$ و $x \in D_3$

$\Leftrightarrow (x = e^4$ أو $x = e^{-1/4})$ و $x \in D_3$

ومنه $S_3 = \{e^4, e^{-1/4}\}$

4) لدينا (4) $\ln|\sin x| + \ln|\tan x| - \ln|\cos x| = 0$

$x \in D_4 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z} \\ |\sin x|>0 \text{ و } |\tan x|>0 \text{ و } |\cos x|>0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} |\sin x| \neq 0 \text{ و } |\tan x| \neq 0 \text{ و } |\cos x| \neq 0 \\ x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z} \\ \sin x \neq 0 \text{ و } \tan x \neq 0 \text{ و } \cos x \neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$ و $x \neq k\pi \mid k\in\mathbb{Z}$

ومنه $D_4 = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$

ولدينا $x \in S_4 \Leftrightarrow \ln|\sin x| + \ln|\tan x| - \ln|\cos x| = 0$

$\Leftrightarrow \ln|\sin x||\tan x| = \ln|\cos x|$ و $x \in D_4$

$\Leftrightarrow |\sin x \tan x| = |\cos x|$ و $x \in D_4$

$\Leftrightarrow \left|\frac{\sin^2 x}{\cos x}\right| = |\cos x|$ و $x \in D_4$

$\Leftrightarrow |\sin^2 x| = |\cos^2 x|$ و $x \in D_4$

$\Leftrightarrow |\sin x| = |\cos x|$ و $x \in D_4$

$\Leftrightarrow (\sin x = \cos x$ أو $\sin x = -\cos x)$ و $x \in D_4$

$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x = 0$ أو $\cos x + \sin x = 0)$ و $x \in D_4$

$\Leftrightarrow (\sqrt{2}\cos(x+\frac{\pi}{4}) = 0$ أو $\sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4}) = 0)$ و $x \in D_4$

$\Leftrightarrow (\cos(x+\frac{\pi}{4}) = 0$ أو $\cos(x-\frac{\pi}{4}) = 0)$ و $x \in D_4$

$\Leftrightarrow (x+\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}+k\pi$ أو $x-\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}+k\pi)$ و $x \in D_4$ $k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow (x = \frac{\pi}{4}+k\pi$ أو $x = \frac{3\pi}{4}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z})$ و $x \in D_4$

ومنه $S_4 = \left\{\frac{\pi}{4}+k\pi, \frac{3\pi}{4}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$

8 حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

(1) $1+\ln(x+3) = \ln(x^2+2x-3)$

(2) $(\ln(x))^3 + 3(\ln(x))^2 - 4(\ln(x)) = 0$

الجواب لتكن S_i مجموعة حلول المعادلة (i)
D_i مجموعة تعريف المعادلة (i)

1) لدينا (1) $1+\ln(x+3) = \ln(x^2+2x-3)$

$x \in D_1 \Leftrightarrow x+3>0$ و $x^2+2x-3>0$

$\Leftrightarrow x>-3$ و $(x-1)(x+3)>0$

$\Leftrightarrow x>-3$ و $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$

ومنه $D_1 =]1, +\infty[$

ولدينا $x \in S_1 \Leftrightarrow 1+\ln(x+3) = \ln(x^2+2x-3)$

$\Leftrightarrow \ln e + \ln(x+1) = \ln(x^2+2x-3)$

$\Leftrightarrow \ln(ex+e) = \ln(x^2+2x-3)$

$\Leftrightarrow ex+e = x^2+2x-3$ و $x \in D_1$

$\Leftrightarrow x^2+(2-e)x-3-e = 0$ و $x \in D_4$

مميز هذه المعادلة $\Delta = e^2+16$

ومنه حلول المعادلة $x^2+(2-e)x-3-e=0$

هما: $x_1 = \frac{e-2-\sqrt{e^2+16}}{2}$ و $x_2 = \frac{e-2+\sqrt{e^2+16}}{2}$

بما أن $x_1 \notin D_1$ و $x_2 \in D_1$

فإن $S_1 = \left\{\frac{e-2+\sqrt{e^2+16}}{2}\right\}$

2) لدينا (2) $(\ln(x))^3 + 3(\ln(x))^2 - 4(\ln(x)) = 0$

$x \in D_2 \Leftrightarrow x>0$

ومنه $D_2 =]0, +\infty[$

ولدينا $x \in S_2 \Leftrightarrow (\ln(x))^3 + 3(\ln(x))^2 - 4(\ln(x)) = 0$

$\Leftrightarrow \ln(x)\left((\ln(x))^2 + 3(\ln(x)) - 4\right) = 0$

$\Leftrightarrow \ln(x)(\ln(x)+4)(\ln(x)-1) = 0$

$\Leftrightarrow \ln(x)=0$ أو $\ln(x)+4=0$ أو $\ln(x)-1=0$

$\Leftrightarrow \ln(x)=0$ أو $\ln(x)=-4$ أو $\ln(x)=1$

$\Leftrightarrow x=1$ أو $x=e^{-4}$ أو $x=e$

ومنه $S_2=\{1, e^{-4}, e\}$

9

1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : (1) $x^4-10x^2+9=0$

2) استنتج حلول المعادلتين :

(2) $(\ln x)^4 - 10(\ln x)^2 + 9 = 0$

(3) $\ln(10-x^2) = 2\ln 3 - \ln x^2$

الجواب 1) لنحل في $\mathbb{R}$ المعادلة (1) $x^4-10x^2+9=0$

نضع $X=x^2$ إذن المعادلة (1) تصبح

$X^2-10X+9=0$

$\Leftrightarrow (X-9)(X-1)=0 \Leftrightarrow X=9$ أو $X=1$

إذن $x^2=9$ أو $x^2=1$

$\Leftrightarrow x=-3$ أو $x=3$ أو $x=-1$ أو $x=1$

ومنه مجموعة حلول المعادلة (1) هي

$S_1=\{-3,-1,1,3\}$

2) لدينا (2) $(\ln x)^4 - 10(\ln x)^2 + 9 = 0$

$\Leftrightarrow \ln x=-3$ أو $\ln x=-1$ أو $\ln x=1$ أو $\ln x=3$

$\Leftrightarrow x=e^{-3}$ أو $x=e^{-1}$ أو $x=e^{1}$ أو $x=e^{3}$

ومنه مجموعة حلول المعادلة (2) هي

$S_2=\{e^{-3}, e^{-1}, e, e^{3}\}$

لدينا (3) $\ln(10-x^2)=2\ln 3-\ln x^2$

لتكن D مجموعة تعريف المعادلة (3)

لدينا $x\in D \Leftrightarrow 10-x^2>0$ و $x^2>0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{10}-x)(\sqrt{10}+x)>0$ و $x^2\neq 0$

$\Leftrightarrow x\in]-\infty,-\sqrt{10}[\cup]\sqrt{10},+\infty[$ و $x\neq 0$

ومنه $D=]-\infty,-\sqrt{10}[\cup]\sqrt{10},+\infty[$

لتكن S_3 مجموعة حلول المعادلة (3)

لدينا $x\in S_3 \Leftrightarrow \ln(10-x^2)=2\ln 3-\ln x^2$

$\Leftrightarrow \ln(10-x^2)=\ln\frac{9}{x^2}$

$\Leftrightarrow 10-x^2=\frac{9}{x^2}$ و $x\in D$

$\Leftrightarrow 10x^2-x^4=9$ و $x\in D$

$\Leftrightarrow x^4-10x^2+9=0$ و $x\in D$

$\Leftrightarrow x\in\{-3,-1,1,3\}\cap D=\emptyset$

ومنه $S_3=\emptyset$

10 نضع $H(x)=12(\ln x)^3+(\ln x)^2-9\ln x+2$

1) احسب $H(\frac{1}{e})$

2) استنتج حلول المعادلة $H(x)=0$.

الجواب 1) لدينا $H(x)=12(\ln x)^3+(\ln x)^2-9\ln x+2$

$H(\frac{1}{e})=12(\ln\frac{1}{e})^3+(\ln\frac{1}{e})^2-9\ln\frac{1}{e}+2$

$=12(-1)^3+(-1)^2-9(-1)+2$

$=-12+1+9+2=-12+12=0$

2) لنحل في $\mathbb{R}$ المعادلة (1) $12(\ln x)^3+(\ln x)^2-9\ln x+2=0$

نضع $X=\ln x$ المعادلة (1) تصبح :

$12X^3+X^2-9X+2=0$

لدينا الحدودية $12x^3+x^2-9x+2$ تقبل القسمة على $x+1$

ولدينا $12x^3+x^2-9x+2=(x+1)(12x^2-11x+2)$

$$=12(x+1)(x-\frac{1}{4})(x-\frac{2}{3})$$

$12x^3+x^2-9x+2=0 \iff x=-1$ أو $x=\frac{1}{4}$ أو $x=\frac{2}{3}$

ومنه $\ln x=-1$ أو $\ln x=\frac{1}{4}$ أو $\ln x=\frac{2}{3}$

أي $x=e^{-1}$ أو $x=e^{1/4}$ أو $x=e^{2/3}$

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة $H(x)=0$ هي

$$S=\left\{e^{-1}, e^{1/4}, e^{2/3}\right\}$$

11 حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية :

(1) $\ln(3-x)\leq 0$

(2) $\ln\left(\frac{x-1}{2x+1}\right)\geq 0$

(3) $\ln(x+1)+\ln(4-x)>0$

(4) $\ln\left(\frac{x+2}{4-x}\right)>\ln(2x-1)$

الجواب

1) لدينا (1) $\ln(3-x)\leq 0$

$\iff \ln(3-x)\leq \ln 1$

$\iff 0<3-x\leq 1 \iff -3<-x\leq -2$

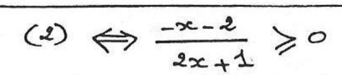
$\iff 2\leq x<3$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة (1) هي $S_1=[2,3[$

2) لدينا (2) $\ln\left(\frac{x-1}{2x+1}\right)\geq 0$

$\iff \ln\left(\frac{x-1}{2x+1}\right)\geq \ln 1$

$\iff \frac{x-1}{2x+1}\geq 1 \iff \frac{x-1}{2x+1}-1\geq 0$



(2) $\iff \frac{-x-2}{2x+1}\geq 0$

x	$-\infty$ -2 $-\frac{1}{2}$ $+\infty$
$-x-2$	$+$ 0 $-$	$-$
$2x+1$	$-$	$-$ 0 $+$
$\frac{-x-2}{2x+1}$	$-$ 0 $+$ || $-$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة (2) هي

$$S_2=[-2,-\frac{1}{2}[$$

3) لدينا (3) $\ln(x+1)+\ln(4-x)>0$

لتكن D_3 مجموعة تعريف المتراجحة (3)

S_3 مجموعة حلول المتراجحة (3)

لدينا $x\in D_3 \iff x+1>0$ و $4-x>0$

$\iff x>-1$ و $x<4$

ومنه $I_3=]-1,4[$

ولدينا $x\in S_3 \iff \ln(x+1)+\ln(4-x)>0$

$\iff \ln(x+1)(4-x)>\ln 1$ و $x\in D_3$

$\iff (x+1)(4-x)>1$ و $x\in D_3$

$\iff -x^2+3x+3>0$ و $x\in D_3$

x	$-\infty$ $\frac{3-\sqrt{21}}{2}$ $\frac{3+\sqrt{21}}{2}$ $+\infty$
$-x^2+3x+3$	$-$ 0 $+$	$-$

ومنه مجموعة المتراجحة (3) هي

$$S_3=\left]\frac{3-\sqrt{21}}{2},\frac{3+\sqrt{21}}{2}\right[\cap\,]-1,4[$$

وبالتالي

$$S_3=\left]\frac{3-\sqrt{21}}{2},\frac{3+\sqrt{21}}{2}\right[$$

4) لدينا $\ln\left(\frac{x+2}{4-x}\right) > \ln(2x-1)$ (4)

لتكن D_4 مجموعة تعريف المتراجحة (4)

و S_3 مجموعة حلول المتراجحة (4)

لدينا $x\in D_4 \iff \frac{x+2}{4-x}>0$ و $2x-1>0$

$\iff x\in]-2,4[$ و $x>\frac{1}{2}$

$\iff x\in]-2,4[\cap]\frac{1}{2},+\infty[$

ومنه $D_4=]\frac{1}{2},4[$

ولدينا $x\in S_4 \iff \ln\left(\frac{x+2}{4-x}\right)>\ln(2x-1)$

$\iff \frac{x+2}{4-x}>2x-1$ و $x\in D_4$

$\iff \frac{x+2}{4-x}-(2x-1)>0$ و $x\in D_4$

$\iff \frac{2x^2-8x+6}{4-x}>0$ و $x\in D_4$

x	$-\infty$		1		3		4		$+\infty$
$2x^2-8x+6$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$4-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{2x^2-8x+6}{4-x}$		$+$	0	$-$	0	$+$	‖	$-$	

إذن $S_4=(]-\infty,1[\cup]3,4[)\cap]\frac{1}{2},4[$

ومنه $S_4=]\frac{1}{2},1[\cup]3,4[$

12 حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية

(1) $\ln(x+2)>-\ln(x+4)+\ln(x+8)$

(2) $\ln(x^2+11x+30)>\ln(x+4)$

(3) $\frac{(\ln x)^2}{\ln x}\leq 6$

(4) $\ln(-x)-\frac{1}{\ln(-x)}\geq\frac{3}{2}$

الجواب لتكن D_i مجموعة تعريف المتراجحة (i)

S_i مجموعة حلول المتراجحة (i)

1) لدينا $\ln(x+2)>-\ln(x+4)+\ln(x+8)$ (1)

$x\in D_1 \iff x+2>0$ و $x+4>0$ و $x+8>0$

$\iff x>-2$ و $x>-4$ و $x>-8$

ومنه $D_1=]-2,+\infty[$

ولدينا $x\in S_1 \iff \ln(x+2)>-\ln(x+4)+\ln(x+8)$

$\iff \ln(x+2)>\ln\left(\frac{x+8}{x+4}\right)$ و $x\in D_1$

$\iff x+2>\frac{x+8}{x+4}$ و $x\in D_1$

$\iff (x+2)(x+4)>x+8$ و $x\in D_1$

$\iff x^2+6x+8>x+8$ و $x\in D_1$

$\iff x^2+5x>0$ و $x\in D_1$

$\iff x(x+5)>0$ و $x\in D_1$

$\iff x\in]-\infty,-5[\cup]0,+\infty[$ و $x\in D_1$

ومنه $S_1=(]-\infty,-5[\cup]0,+\infty[)\cap]-2,+\infty[$

أي $S_1=]0,+\infty[$

2) لدينا $\ln(x^2+11x+30)>\ln(x+4)$ (2)

$x\in D_2 \iff x^2+11x+30>0$ و $x+4>0$

$\iff (x+5)(x+6)>0$ و $x>-4$

$\iff x\in]-\infty,-6[\cup]-5,+\infty[$ و $x>-4$

$\iff x\in]-4,+\infty[$

ومنه $D_2=]-4,+\infty[$

ولدينا $x\in S_2 \iff \ln(x^2+11x+30)>\ln(x+4)$

$\iff x^2+11x+30>x+4$ و $x\in D_2$

$\iff x^2+10x+26>0$ و $x\in D_2$

$\iff x\in D_2$ (لأن لكل x من $\mathbb{R}$: $x^2+10x+26=(x+5)^2+1>0$)

ومنه $S_2=]-4,+\infty[$

3) لدينا $(3) \quad \dfrac{(\ln x)^2}{\ln x} \leq 6$

$x \in D_3 \Leftrightarrow x > 0$ و $\ln x \neq 0$

$\Leftrightarrow x > 0$ و $x \neq 1$

ومنه $D_3 =]0, 1[\cup]1, +\infty[$

ولدينا $x \in S_3 \Leftrightarrow \dfrac{(\ln x)^2}{\ln x} \leq 6$

$\Leftrightarrow \ln x \leq 6$ و $x \in D_3$

$\Leftrightarrow x \leq e^6$ و $x \in D_3$

ومنه $S_3 =]0, 1[\cup]1, e^6[$

4) لدينا $(4) \quad \ln(-x) - \dfrac{1}{\ln(-x)} \geq \dfrac{3}{2}$

$x \in D_4 \Leftrightarrow -x > 0$ و $\ln(-x) \neq 0$

$\Leftrightarrow x < 0$ و $-x \neq 1$

ومنه $D_4 =]-\infty, -1[\cup]-1, 0[$

ولدينا $x \in S_4 \Leftrightarrow \ln(-x) - \dfrac{1}{\ln(-x)} - \dfrac{3}{2} \geq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{2\ln^2(-x) - 3\ln(-x) - 2}{2\ln(-x)} \geq 0$ و $x \in D_4$

$\Leftrightarrow \dfrac{2(\ln(-x) + \frac{1}{2})(\ln(-x) - 2)}{2\ln(-x)} \geq 0$

$-x$	0		$e^{-1/2}$		1		e^2		$+\infty$
$\ln(-x) + \frac{1}{2}$	‖	$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\ln(-x) - 2$	‖	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\ln(-x)$	‖	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{2(\ln(-x)+\frac{1}{2})(\ln(-x)-2)}{2\ln(-x)}$	‖	$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

ومنه $-x \in [e^{-1/2}, 1[\cup [e^2, +\infty[$

وبالتالي $S_4 =]-\infty, -e^2[\cup]-1, -e^{-\frac{1}{2}}]$

13 حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية :

$(1) \quad 4(\ln x)^2 - 3\ln x - 1 \leq 0$

$(2) \quad (2x-7)(\ln(x-3) - 1) < 0$

$(3) \quad \ln^3 x + \ln^2 x + \ln x + 1 \geq 0$

$(4) \quad \sqrt{\dfrac{\ln x}{\ln x - 1}} > 1$

الجواب 1) لدينا $(1) \quad 4(\ln x)^2 - 3\ln x - 1 \leq 0$

$\Leftrightarrow 4(\ln x - 1)(\ln x + \frac{1}{4}) \leq 0$ و $x > 0$

x	0		$e^{-1/4}$		e		$+\infty$
$\ln x - 1$	‖	$-$		$-$	0	$+$	
$\ln x + \frac{1}{4}$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$4\ln^2 x - 3\ln x - 1$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

ومنه مجموعة حلول المتراجحة (1) هي

$S_1 = [e^{-1/4}, e]$

2) لدينا $(2) \quad (2x-7)(\ln(x-3) - 1) < 0$

لنحل المعادلة $\ln(x-3) - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \ln(x-3) = 1 \Leftrightarrow x - 3 = e \Leftrightarrow x = 3 + e$

مجموعة تعريف المتراجحة (2) هي $D_2 =]3, +\infty[$

ولتكن S_2 مجموعة حلول المتراجحة (2) .

x	3		$7/2$		$3+e$		$+\infty$
$2x-7$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$\ln(x-3) - 1$	‖	$-$		$-$	0	$+$	
$(2x-7)(\ln(x-3)-1)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

ومنه $S_2 =]\frac{7}{2} , 3+e[$

3) لدينا
(3) $\ln^3 x + \ln^2 x + \ln x + 1 \geq 0$

$\Leftrightarrow \ln^2 x(\ln x + 1) + \ln x + 1 \geq 0$

$\Leftrightarrow (\ln x + 1)(\ln^2 x + 1) \geq 0$

$\Leftrightarrow \ln x + 1 \geq 0$ (لأن $\ln^2 x + 1 > 0$)

$\Leftrightarrow \ln x \geq -1 \Leftrightarrow x > e^{-1}$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة (3) هي :

$S_3 =]e^{-1}, +\infty[$

4) لدينا
(4) $\sqrt{\frac{\ln x}{\ln x - 1}} > 1$

لتكن D_4 مجموعة تعريف المتراجحة (4)

و S_4 مجموعة حلول المتراجحة (4)

لدينا $x \in D_4 \Leftrightarrow x > 0$ و $\ln x \neq 1$ و $\frac{\ln x}{\ln x - 1} \geq 0$

x	0		1		e		$+\infty$
$\ln x$		$-$	0	$+$		$+$	
$\ln x - 1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{\ln x}{\ln x - 1}$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

ومنه $D_4 =]0, 1] \cup]e, +\infty[$

ولدينا $x \in S_4 \Leftrightarrow \frac{\ln x}{\ln x - 1} - 1 > 0$ و $x \in D_4$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\ln x - 1} > 0$ و $x \in D_4$

$\Leftrightarrow \ln x - 1 > 0$ و $x \in D_4$

$\Leftrightarrow \ln x > 1$ و $x \in D_4$

$\Leftrightarrow x > e$ و $x \in D_4$

ومنه $S_4 =]e, +\infty[$

النظمات

14 حل في $\mathbb{R}^2$ النظمتين التاليتين :

$$(S_1) \begin{cases} 2\ln x + 3\ln y = -2 \\ 3\ln x + 5\ln y = -4 \end{cases}$$

$$(S_2) \begin{cases} \ln x^3 - \ln y^2 + 4 = 0 \\ \ln x + \ln y^4 - 1 = 0 \end{cases}$$

الجواب لدينا

$$(S_1) \begin{cases} 2\ln x + 3\ln y = -2 \\ 3\ln x + 5\ln y = -4 \end{cases}$$

نضع $X = \ln x$ و $Y = \ln y$

إذن النظمة (S_1) تصبح

$$\begin{cases} 2X + 3Y = -2 \\ 3X + 5Y = -4 \end{cases}$$

ولدينا

$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 9 = 1$

$\Delta X = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = -10 + 12 = 2$

$\Delta Y = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -8 + 6 = -2$

ومنه $X = \frac{\Delta X}{\Delta} = 2$ و $Y = \frac{\Delta Y}{\Delta} = -2$

أي $\ln x = 2$ و $\ln y = -2$

أي $x = e^2$ و $y = e^{-2}$

وبالتالي مجموعة حلول النظمة (S_1) هي

$S_1 = \{(e^2, e^{-2})\}$

لدينا

$$(S_2) \begin{cases} \ln x^3 - \ln y^2 = -4 \\ \ln x + \ln y^4 = 1 \end{cases}$$

لتكن D_2 مجموعة تعريف النظمة (S_2)

ولتكن S_2 مجموعة حلول النظمة (S_2).

$(x,y) \in D_2 \Leftrightarrow x^3 > 0$ و $y^2 > 0$

$\Leftrightarrow x > 0$ و $y \neq 0$

ومنه $D_2 = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^*$

$$(x,y)\in S_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x^3 - \ln y^2 = -4 \\ \ln x + \ln y^4 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\ln x - 2\ln|y| = -4 \\ \ln x + 4\ln|y| = 1 \end{cases}$$ و $(x,y)\in D_2$

لنحل النظمة

$$\begin{cases} 3\ln x - 2\ln|y| = -4 \\ \ln x + 4\ln|y| = 1 \end{cases}$$

نضع $X = \ln x$ و $Y = \ln|y|$

النظمة (S_2') تصبح

$$\begin{cases} 3X - 2Y = -4 \\ X + 4Y = 1 \end{cases}$$

لدينا

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 12 + 2 = 14$$

$$\Delta_X = \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -16 + 2 = -14$$

$$\Delta_Y = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 4 = 7$$

ومنه $X = \frac{\Delta_X}{\Delta} = -1$ و $Y = \frac{\Delta_Y}{\Delta} = \frac{1}{2}$

أي $\ln x = -1$ و $\ln|y| = \frac{1}{2}$

أي $x = e^{-1}$ و $|y| = e^{1/2}$

أي $x = e^{-1}$ و ($y = -e^{1/2}$ أو $y = e^{1/2}$)

ومنه $S_2 = \{(e^{-1}, -e^{1/2}), (e^{-1}, e^{1/2})\}$

15 حل في $\mathbb{R}^2$ النظمتين التاليتين :

$$(S_1): \begin{cases} \ln x - \ln y = 1 \\ x + y = 2e \end{cases}$$

$$(S_2): \begin{cases} \ln(x-y) = 0 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

الجواب

لدينا

$$(S_1): \begin{cases} \ln x - \ln y = 1 \\ x + y = 2e \end{cases}$$

لتكن D_1 مجموعة تعريف النظمة (S_1) و S_1 مجموعة حلولها

لدينا $(x,y) \in D_1 \Leftrightarrow x > 0$ و $y > 0$

ومنه $D_1 = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$

ولدينا

$$(x,y) \in S_1 \Leftrightarrow \begin{cases} \ln\left(\frac{x}{y}\right) = 1 \\ x + y = 2e \end{cases}$$ و $(x,y)\in D_1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} = e \\ x + y = 2e \end{cases}$$ و $(x,y)\in D_1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = ye \\ y(1+e) = 2e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = ye \\ y = \frac{2e}{1+e} \end{cases}$$

ومنه $x = \frac{2e^2}{1+e}$ و $y = \frac{2e}{1+e}$

وبالتالي $S_2 = \left\{\left(\frac{2e^2}{1+e}, \frac{2e}{1+e}\right)\right\}$

لدينا

$$(S_2): \begin{cases} \ln(x-y) = 0 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

ومنه $S_2 = \{(2,1)\}$

16 حل في $\mathbb{R}^2$ النظمتين التاليتين :

$$(S_1): \begin{cases} 2\ln x + \ln y = \ln \frac{x}{y} \\ \ln x + 2\ln y = 0 \end{cases}$$

$$(S_2): \begin{cases} xy = 2 \\ \ln x + \ln y = 3 \end{cases}$$

الجواب لدينا

$$(S_1): \begin{cases} 2\ln x + \ln y = \ln \frac{x}{y} \\ \ln x + 2\ln y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \text{ و } y>0 \\ 2\ln x + \ln y = \ln x - \ln y \\ \ln x + 2y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \text{ و } y>0 \\ \ln x + 2\ln y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \text{ و } y>0 \\ \ln xy^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \text{ و } y>0 \\ xy^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ y = \frac{1}{\sqrt{x}} \end{cases}$$

ومنه مجموعة حلول النظمة (S_1) هي :

$$S_1 = \left\{ \left(x, \frac{1}{\sqrt{x}}\right) / x \in \mathbb{R}_+^* \right\}$$

لدينا

$$(S_2): \begin{cases} xy = 2 \\ \ln x + \ln y = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \text{ و } y>0 \\ xy = 2 \\ \ln x + \ln y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \text{ و } y>0 \\ \ln x + \ln y = \ln 2 \\ \ln x + \ln y = 3 \end{cases}$$

بما أن $\ln 2 < \ln e = 1 < 3$ فإن $\ln 2 \neq 3$

ومنه مجموعة حلول النظمة S_2 هي : $S_2 = \emptyset$

تحديد مجموعة التعريف

تذكير

لتكن $f(x) = \ln(u(x))$

$$x \in D_f \Leftrightarrow \begin{cases} x \in D_u \\ u(x) > 0 \end{cases}$$

لتكن $f(x) = \ln|u(x)|$

$$x \in D_f \Leftrightarrow \begin{cases} x \in D_u \\ u(x) \neq 0 \end{cases}$$

17 حدد مجموعة تعريف الدالة f في كل من الحالات التالية :

1) $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$

2) $f(x) = \frac{1}{x} + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

3) $f(x) = \ln(x-1)^2$

4) $f(x) = \frac{1}{x}\left(1 - \ln(\ln x)\right)$

5) $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{\ln(x-2)}$

الجواب ليكن x عددا حقيقيا و D_f مجموعة تعريف الدالة f.

1) لدينا $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$

$x \in D_f \Leftrightarrow x > 0$ و $x\ln x \neq 0 \Leftrightarrow x>0$ و $\ln x \neq 0 \Leftrightarrow x > 0$ و $x = 1$

ومنه $D_f =]0,1[\cup]1,+\infty[$

2) لدينا $f(x)=\frac{1}{x}+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

$x\in D_f \Leftrightarrow x\neq 0$ و $1+\frac{1}{x}>0$

$\Leftrightarrow x\neq 0$ و $\frac{x+1}{x}>0$

$\Leftrightarrow x\in]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$

ومنه $D_f=]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$

3) لدينا $f(x)=\ln(x-1)^2$

$f(x)=2\ln|x-1|$

$x\in D_f \Leftrightarrow |x-1|>0 \Leftrightarrow x-1\neq 0$

$\Leftrightarrow x\neq 1$

ومنه $D_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

4) لدينا $f(x)=\frac{1}{x}(1-\ln(\ln x))$

$x\in D_f \Leftrightarrow x\neq 0$ و $x>0$ و $1-\ln(\ln x)>0$

$\Leftrightarrow x>0$ و $\ln(\ln x)>1$

$\Leftrightarrow x>0$ و $\ln x>e$

$\Leftrightarrow x>0$ و $x>e^e$

ومنه $D_f=]e^e,+\infty[$

5) لدينا $f(x)=\frac{\ln(x+1)}{\ln(x-2)}$

$x\in D_f \Leftrightarrow x+1>0$ و $x-2>0$ و $\ln(x-2)\neq 0$

$\Leftrightarrow x>-1$ و $x>2$ و $x-2\neq 1$

$\Leftrightarrow x>2$ و $x\neq 3$

ومنه $D_f=]2,3[\cup]3,+\infty[$

18 حدد مجموعة تعريف الدالة f في كل من الحالات التالية

1) $f(x)=\sqrt{\frac{x}{\ln x-1}}$

2) $f(x)=\sqrt{\ln(3+x)}$

3) $f(x)=\sqrt{\ln^2 x+\ln x-2}$

4) $f(x)=\sqrt{\ln(\sqrt{\ln x})}$

5) $f(x)=\ln(x^2+x)$

الجواب

1) لدينا $f(x)=\sqrt{\frac{x}{\ln x-1}}$

$x\in D_f \Leftrightarrow x>0$ و $\frac{x}{\ln x-1}\geqslant 0$ و $\ln x-1\neq 0$

$\Leftrightarrow x>0$ و $x\neq e$ و $\ln x-1>0$

$\Leftrightarrow x>0$ و $x\neq e$ و $\ln x>1$

$\Leftrightarrow x>0$ و $x\neq e$ و $x>e$

ومنه $D_f=]e,+\infty[$

2) لدينا $f(x)=\sqrt{\ln(3+x)}$

$x\in D_f \Leftrightarrow 3+x>0$ و $\ln(3+x)\geqslant 0$

$\Leftrightarrow x>-3$ و $3+x\geqslant 1$

$\Leftrightarrow x>-3$ و $x\geqslant -2$

ومنه $D_f=[-2,+\infty[$

3) لدينا $f(x)=\sqrt{\ln^2 x+\ln x-2}$

$x\in D_f \Leftrightarrow x>0$ و $\ln^2 x+\ln x-2\geqslant 0$

$\Leftrightarrow x>0$ و $(\ln x-1)(\ln x+2)\geqslant 0$

x	0	e^{-2}	e	$+\infty$
$\ln x-1$	$-$	$-$	0	$+$
$\ln x+2$	$-$	0	$+$	$+$
$\ln^2 x+\ln x-2$	$+$	0	$-$	0 $+$

ومنه $D_f =]0, e^{-2}] \cup [e, +\infty[$

4) لدينا: $f(x)=\sqrt{\ln(\sqrt{\ln x})}$

$x\in D_f \Leftrightarrow x>0$ و $\ln x>0$

$\Leftrightarrow x>0$ و $x>1 \Leftrightarrow x>1$

ومنه $D_f=]1,+\infty[$

5) لدينا $f(x)=\ln(x^2+x)$

$x\in D_f \Leftrightarrow x^2+x>0$

$\Leftrightarrow x(x+1)>0 \Leftrightarrow x\in]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$

ومنه $D_f=]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$

19 حدد مجموعة تعريف الدالة f في كل من الحالات التالية:

1) $f(x)=\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$

2) $f(x)=\ln(x^2+x+1)$

3) $f(x)=\ln(x-2)+\ln(1-x)$

4) $f(x)=\sqrt{\ln(|x|+1)}$

الجواب

1) لدينا $f(x)=\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$

$x\in D_f \Leftrightarrow x+1\neq 0$ و $\left|\frac{x-1}{x+1}\right|>0$

$\Leftrightarrow x\neq -1$ و $\frac{x-1}{x+1}\neq 0$

$\Leftrightarrow x\neq -1$ و $x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -1$ و $x\neq 1$

ومنه فإن: $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$

2) لدينا: $f(x)=\ln(x^2+x+1)$

$x\in D_f \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\ ,\ x^2+x+1>0$

$x\in D_f \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\ ,\ \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$

بما أن العبارة الأخيرة صحيحة فإن: $D_f=\mathbb{R}$

3) لدينا: $f(x)=\ln(x-2)+\ln(1-x)$

$x\in D_f \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\ ,\ x-2>0\ ,\ 1-x>0$

$x\in D_f \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\ ,\ x>2\ ,\ x<1$

ومنه فإن: $D_f=\emptyset$

4) لدينا: $f(x)=\sqrt{\ln(|x|+1)}$

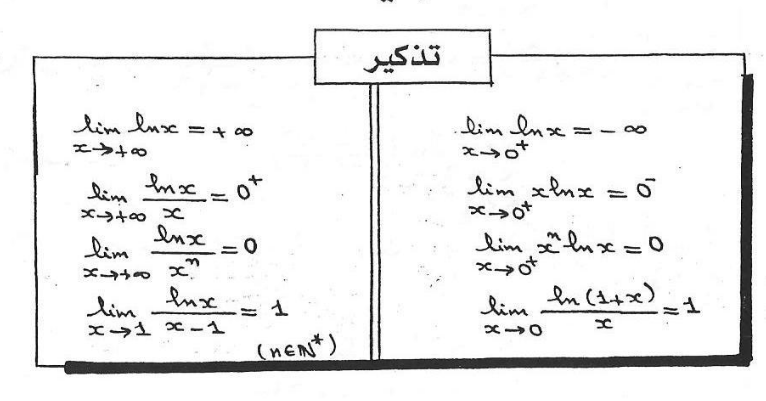
$x\in D_f \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\ ,\ |x|+1>0$

$x\in D_f \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\ ,\ |x|>-1$

بما أن العبارة الأخيرة صحيحة فإن: $D_f=\mathbb{R}$

النهايات

تذكير



$\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$; $\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$

$\lim_{x\to 0^+}x\ln x=0^-$; $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0^+$

$\lim_{x\to 0^+}x^n\ln x=0$; $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}=0$

$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$; $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=1$ $(n\in\mathbb{N}^*)$

20 حدد النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \ln\left(\frac{3-2x}{x+1}\right)$

2) $\lim\limits_{\substack{x\to \frac{3}{2}\\ x<\frac{3}{2}}} \ln\left(\frac{3-2x}{x+1}\right)$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2\ln x-3}{1+3\ln x}$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x-3x}{2\ln x+x}$

تقنية

$$\lim_{x\to a} u(x)=+\infty \Rightarrow \lim_{x\to a} \ln(u(x))=+\infty$$

$$\lim_{x\to a} u(x)=0^+ \Rightarrow \lim_{x\to a} \ln(u(x))=-\infty$$

$$\lim_{x\to a} u(x)=b>0 \Rightarrow \lim_{x\to a} \ln(u(x))=\ln b$$

الجواب 1) حساب $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \ln\left(\frac{3-2x}{x+1}\right)$

بما أن $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \frac{3-2x}{x+1}=+\infty$ فإن $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \ln\left(\frac{3-2x}{x+1}\right)=+\infty$

2) حساب $\lim\limits_{\substack{x\to \frac{3}{2}\\ x<\frac{3}{2}}} \ln\left(\frac{3-2x}{x+1}\right)$

بما أن $\lim\limits_{\substack{x\to \frac{3}{2}\\ x>\frac{3}{2}}} \frac{3-2x}{x+1}=0^+$ فإن $\lim\limits_{\substack{x\to \frac{3}{2}\\ x<\frac{3}{2}}} \ln\left(\frac{3-2x}{x+1}\right)=-\infty$

3) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2\ln x-3}{1+3\ln x}$

شكل غير محدد من نوع " $\frac{+\infty}{+\infty}$ " لا يمكن حساب النهاية مباشرة .

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2\ln x-3}{1+3\ln x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x\left(2-\frac{3}{\ln x}\right)}{\ln x\left(\frac{1}{\ln x}+3\right)}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2-\frac{3}{\ln x}}{3+\frac{1}{\ln x}}$$

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{\ln x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$ (لأن $\frac{\ell}{\infty}=0$)

فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2\ln x-3}{1+3\ln x} = \frac{2}{3}$

4) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x-3x}{2\ln x+x}$

شكل غير محدد من نوع " $+\infty-\infty$ " لا يمكن حساب النهاية مباشرة

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x-3x}{2\ln x+x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x\left(\frac{\ln x}{x}-3\right)}{x\left(2\frac{\ln x}{x}+1\right)}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\ln x}{x}-3}{2\frac{\ln x}{x}+1}$$

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}=0$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x-3x}{2\ln x+x}=-3$

21 حدد النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln x-x}{\ln x+x}$

2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^2\ln x$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} x-\ln x$

4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x-\ln x}{\ln x+2}$

الجواب 1) حساب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln x-x}{\ln x+x}$

شكل غير محدد من نوع " $\frac{\infty}{\infty}$ " لا يمكن حساب النهاية مباشرة

لدينا

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{\ln x - x}{\ln x + x} = \lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{\ln x\left(1-\frac{x}{\ln x}\right)}{\ln x\left(1+\frac{x}{\ln x}\right)}$$

$$= \lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1-\frac{x}{\ln x}}{1+\frac{x}{\ln x}}$$

بما أن $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{x}{\ln x}=0$ (لأن $\frac{0}{\infty}=0$)

فإن

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{\ln x - x}{\ln x + x} = 1$$

2) حساب $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} x^2\ln x$.

بما أن: $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} x\ln x = 0$ فإن: $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} x^2\ln x = \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} x(x\ln x)=0$

3) حساب $\lim_{x\to+\infty} x-\ln x$

لدينا

$$\lim_{x\to+\infty} x-\ln x = \lim_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$$

(لأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$)

4) حساب $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{x-\ln x}{\ln x+2}$

لدينا

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{x-\ln x}{\ln x+2} = \lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{\ln x\left(\frac{x}{\ln x}-1\right)}{\ln x\left(1+\frac{2}{\ln x}\right)}$$

$$= \lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{\frac{x}{\ln x}-1}{1+\frac{2}{\ln x}} = -1$$

(لأن $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{x}{\ln x} = \lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{2}{\ln x} = 0$)

22 حدد النهايتين التاليتين:

1) $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} x^2\ln^3 x$ 2) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^2 x}{x^3}$.

Astuce

$$\forall (m,n)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^* \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^n}{x^m}=0^+$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} x^m(\ln x)^n=0$$

لا يسمح عادة باستعمالها مباشرة لهذا الغرض نستعمل المتساوية التالية:

لدينا

$$\frac{(\ln x)^n}{x^m} = \left(\frac{n}{m}\right)^n\left(\frac{\ln\left(x^{\frac{m}{n}}\right)}{x^{\frac{m}{n}}}\right)^n$$

بوضع $t=x^{\frac{m}{n}}$ $(x\to+\infty \Leftrightarrow t\to+\infty)$

نحصل على:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^n}{x^m} = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{n}{m}\right)^n\left(\frac{\ln t}{t}\right)^n=0$$

لدينا

$$x^m(\ln x)^n = \left(\frac{n}{m}\right)^n\left(x^{\frac{m}{n}}\ln\left(x^{\frac{m}{n}}\right)\right)^n$$

بوضع $t=x^{\frac{m}{n}}$ $(x\to0^+ \Leftrightarrow t\to0^+)$

نحصل على:

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} x^m(\ln x)^n = \lim_{\substack{t\to0\\t>0}}\left(\frac{n}{m}\right)^n(t\ln t)^n=0$$

الجواب 1) حساب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^2\ln^3 x$

لدينا $x^2\ln^3 x = \left(x^{\frac{2}{3}}\ln\left(x^{\frac{2}{3}}\right)\right)^3 \times \left(\frac{3}{2}\right)^3$

بوضع $t = x^{\frac{2}{3}}$ $\quad (x\to 0^+ \Leftrightarrow t\to 0^+)$

ومنه $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^2\ln^3 x = \lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \left(\frac{3}{2}\right)^3 (t\ln t)^3 = 0$

(لأن $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}} t\ln t = 0$)

2) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln^2 x}{x^3}$.

لدينا $\frac{\ln^2 x}{x^3} = \left(\frac{\ln x^{\frac{3}{2}}}{x^{3/2}}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2$

بوضع $t = x^{\frac{3}{2}}$ $\quad (x\to+\infty \Leftrightarrow t\to+\infty)$

ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln^2 x}{x^3} = \lim\limits_{t\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{\ln t}{t}\right)^2 = 0$

(لأن $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$)

23

حدد النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x+2)-\ln(x+1)$ $\qquad$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x)-x^2$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x^2+x)-x$ $\qquad$ 4) $\lim\limits_{x\to-\infty} x+\ln x^2$

الجواب 1) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x+2)-\ln(x+1)$

شكل غير محدد من نوع "$+\infty-\infty$" لا يمكن حساب النهاية مباشرة

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x+2)-\ln(x+1) = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right)$$

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+2}{x+1} = 1$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right) = \ln 1 = 0$

ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x+2)-\ln(x+1) = 0$

2) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x)-x^2$ شكل غير محدد من نوع "$+\infty-\infty$"

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x)-x^2 = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x} - x\right)x = -\infty$$

(لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$)

3) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x^2+1)-x$ شكل غير محدد من نوع "$+\infty-\infty$"

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x^2+x)-x = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) - x$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \ln x^2 + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - x$$

$$= \lim_{x\to+\infty} 2\ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - x$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(2\frac{\ln x}{x} - 1\right) + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x^2+x)-x = -\infty$

(لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$)

4) حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} x+\ln x^2$ شكل غير محدد من نوع "$-\infty+\infty$"

$$\lim_{x\to-\infty} x+\ln x^2 = \lim_{x\to-\infty} x + 2\ln|x|$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x + 2\ln(-x)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x\left(1 - 2\frac{\ln(-x)}{-x}\right)$$

ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty} x+\ln x^2 = -\infty$

(لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\ln(-x)}{-x} = 0$)

24

حدد النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x\ln\sqrt{|\ln x|}$

2) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \sqrt{x}\ln x$

3) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x\ln(x^2+2x)$

4) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \sqrt[3]{x}\ln^2 x$

الجواب 1) حساب $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x\ln\sqrt{|\ln x|}$ شكل غير محدد من نوع "$0\times+\infty$"

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} x\ln\sqrt{|\ln x|} = \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{x}{2}\ln(|\ln x|)$$

$$= \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{1}{2}x|\ln x|\frac{\ln(|\ln x|)}{|\ln x|}$$

$$= \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{1}{2}|x\ln x|\frac{\ln(|\ln x|)}{|\ln x|}$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{\ln(|\ln x|)}{|\ln x|} = \lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t} = 0 \quad (\text{نضع } t=|\ln t|)$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} x\ln x = 0$$

ومنه $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x\ln\sqrt{|\ln x|} = 0$

2) حساب $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \sqrt{x}\ln x$ شكل غير محدد من نوع "$0\times-\infty$"

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \sqrt{x}\ln x = \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \sqrt{x}\ln(\sqrt{x})^2 = \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} 2\sqrt{x}\ln(\sqrt{x}) = 0$$

لأن $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \sqrt{x}\ln\sqrt{x} = \lim\limits_{\substack{t\to0\\t>0}} t\ln t = 0$ (نضع $t=\sqrt{x}$)

3) حساب $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x\ln(x^2+2x)$ شكل غير محدد من نوع "$0\times-\infty$"

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} x\ln(x^2+2x) = \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{x}{x^2+2x}(x^2+2x)\ln(x^2+2x)$$

$$= \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{1}{x+2}(x^2+2x)\ln(x^2+2x)$$

بما أن $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{2}$ و $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} (x^2+2x)\ln(x^2+2x) = 0$

فإن $\lim\limits_{x\to0} x\ln(x^2+2x) = 0$

4) حساب $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \sqrt[3]{x}\ln^2 x$ شكل غير محدد من نوع "$0\times+\infty$"

ليكن $x>0$ لدينا $\sqrt[3]{x}\ln^2 x = \left(\sqrt[6]{x}\ln\sqrt[6]{x}\right)^2\times 6^2$

بوضع $t=\sqrt[6]{x}$ $\quad (x\to0^+ \Leftrightarrow t\to0^+)$

ومنه $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \sqrt[3]{x}\ln^2 x = \lim\limits_{\substack{t\to0\\t>0}} 36(t\ln t)^2 = 0$

لأن ($\lim\limits_{\substack{t\to0\\t>0}} t\ln t = 0$)

25

حدد النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\ln(1+\tan x)}{\tan x}$

2) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \sin x\ln x$

3) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2}$

4) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\ln(1+\sin x)}{\tan x}$

الجواب 1) حساب $\lim\limits_{x\to0} \frac{\ln(1+\tan x)}{\tan x}$ شكل غير محدد من نوع "$\frac{0}{0}$"

نضع $t=\tan x$ $\quad (x\to0 \Leftrightarrow t\to0)$

ومنه $\lim\limits_{x\to0} \frac{\ln(1+\tan x)}{\tan x} = \lim\limits_{t\to0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$

2) حساب $\lim\limits_{x\to0} \sin x\ln x$ شكل غير محدد من نوع "$0\times-\infty$"

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \sin x\ln x = \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{\sin x}{x}(x\ln x)$$

بما أن $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x\ln x = 0$ و $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{\sin x}{x}=1$

فإن $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\sin x\ln x = 0$.

3) حساب $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}$ شكل غير محدد من نوع "$\frac{0}{0}$"

لدينا $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(\cos x)}{\cos x-1}\times\frac{\cos x-1}{x^2}$

نضع $t=\cos x$ $\quad(x\to0 \Leftrightarrow t\to1)$

إذن $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(\cos x)}{\cos x-1}=\lim\limits_{t\to1}\frac{\ln t}{t-1}=1$

ولدينا $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$

ومنه $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2} = -\frac{1}{2}$

4) حساب $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+\sin x)}{\tan x}$ شكل غير محدد من نوع "$\frac{0}{0}$"

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+\sin x)}{\tan x} = \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\tan x}\times\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x}$$

$$=\lim_{x\to0}\cos x\times\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x}$$

بما أن $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x}=1$ و $\lim\limits_{x\to0}\cos x=1$

فإن $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x}=1$

26 حدد النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(\tan x)}{4x-\pi}$ 2) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x}{x^3-1}$

3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+20x)}{x^2+x}$ 4) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(\frac{1+x}{x}\right)$

الجواب

1) حساب $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(\tan x)}{4x-1}$ شكل غير محدد من نوع "$\frac{0}{0}$"

تقنية

$$\lim_{x\to a}\frac{\ln x-\ln a}{x-a}=\frac{1}{a}\qquad(a>0)$$

لدينا $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(\tan x)}{4x-\pi} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(\tan x)-\ln(\tan\frac{\pi}{4})}{4(x-\frac{\pi}{4})}$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{4}\times\frac{\ln(\tan x)-\ln(\tan\frac{\pi}{4})}{\tan x-\tan\frac{\pi}{4}}\times\frac{\tan x-\tan\frac{\pi}{4}}{x-\frac{\pi}{4}}$$

نضع $t=\tan x$ $\quad(x\to\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow t\to1)$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(\tan x)-\ln(\tan\frac{\pi}{4})}{\tan x-\tan\frac{\pi}{4}}=\lim_{t\to1}\frac{\ln t-\ln 1}{t-1}=1$$

و $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-\tan\frac{\pi}{4}}{x-\frac{\pi}{4}}=1+\tan^2\frac{\pi}{4}=2$

ومنه $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(\tan x)}{4x-\pi}=\frac{1}{4}\times1\times2=\frac{1}{2}$

2) حساب $\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x}{x^3-1}$ شكل غير محدد من نوع "$\frac{0}{0}$"

$$\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{x^3-1}=\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}\cdot\frac{1}{x^2+x+1}=1\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

3) حساب $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+20x)}{x^2+x}$ شكل غير محدد من نوع "$\frac{0}{0}$"

لدينا $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+20x)}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+20x)}{20x}\times\frac{20x}{x^2+x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+20x)}{20x}\times\frac{20}{x+1}=1\times 20$$

ومنه $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+20x)}{x^2+x}=20$

4) حساب $\lim\limits_{x\to +\infty} x\ln\left(\frac{1+x}{x}\right)$ شكل غير محدد من نوع "$+\infty\times 0$"

$\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{1+x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

نضع $t=\frac{1}{x}$ أي $x=\frac{1}{t}$ $(x\to+\infty \Leftrightarrow t\to 0^+)$

ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{1+x}{x}\right)=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1.$

27 حدد النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x}{x-2}\ln\left(\frac{x}{2}\right)$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{x}\ln\left(\frac{1+2x}{1-2x}\right)$

3) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln(2x-1)}$ 4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\ln x}{1-\ln x}$

الجواب 1) حساب $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x}{x-2}\ln\left(\frac{x}{2}\right)$ شكل غير محدد نوع "$\infty\times 0$"

نضع $t=\frac{x}{2}$ $(x\to 2 \Leftrightarrow t\to 1)$

إذن $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x}{x-2}\ln\left(\frac{x}{2}\right)=\lim\limits_{t\to 1}\frac{2t}{2t-2}\ln t$

$$=\lim_{t\to 1} t\cdot\frac{\ln t}{t-1}$$

$$=1$$

(لأن $\lim\limits_{t\to 1}\frac{\ln t}{t-1}=1$)

2) حساب $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{x}\ln\left(\frac{1+2x}{1-2x}\right)$ شكل غير محدد من نوع "$\infty\times 0$"

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{x}\ln\left(\frac{1+2x}{1-2x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{x}\left(\ln(1+2x)-\ln(1-2x)\right)$

$$=\lim_{x\to 0}2\left(\frac{\ln(1+2x)}{x}-\frac{\ln(1-2x)}{x}\right)$$

تقنية

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\lambda x)}{x}=\lambda \quad (\lambda\in\mathbb{R})$$

ومنه $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{x}=2$ و $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-2x)}{x}=-2$

إذن $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{x}\ln\left(\frac{1+2x}{1-2x}\right)=2(2-(-2))=8$

3) حساب $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln(2x-1)}$ شكل غير محدد من نوع "$\frac{0}{0}$"

نضع $t=2x-1$ أي $x=\frac{t+1}{2}$ $(x\to 1\Leftrightarrow t\to 1)$

لدينا $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln(2x-1)}=\lim\limits_{t\to 1}\frac{\frac{t+1}{2}-1}{\ln t}$

$$=\lim_{t\to 1}\frac{1}{2}\cdot\frac{t-1}{\ln t}=\frac{1}{2}\lim_{t\to 1}\frac{1}{\frac{\ln t}{t-1}}$$

$$=\frac{1}{2}$$

(لأن $\lim\limits_{t\to 1}\frac{\ln t}{t-1}=1$)

4) حساب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\ln x}{1-\ln x}$ شكل غير محدد من نوع "$\frac{\infty}{\infty}$"

لدينا

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\ln x}{1-\ln x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\ln x}{\ln x\left(\frac{1}{\ln x}-1\right)}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{1}{\frac{1}{\ln x}-1}=-1$$

(لأن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{1}{\ln x}=0$)

28

حدد النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln^2 x + \ln x$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{(x+1)^2}$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{2+\ln x}$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\ln x}{x+3}$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{1+\sqrt{x}}$

6) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\ln(x+2)-\ln(x-1)\right)$

الجواب

1) حساب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln^2 x + \ln x$ شكل غير محدد من نوع "$+\infty-\infty$"

لدينا $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln^2 x + \ln x = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x(\ln x + 1) = +\infty$

(لأن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty$)

2) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{(x+1)^2}$ شكل غير محدد من نوع "$\frac{\infty}{\infty}$"

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{(x+1)^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^2+2x+1}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{\ln x}{x^2}$$

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}} = 1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = 0$

فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{(x+1)^2} = 0$

3) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{2+\ln x}$ شكل غير محدد من نوع "$\frac{\infty}{\infty}$"

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{2+\ln x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{\ln x\left(\frac{2}{\ln x}+1\right)}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{2}{\ln x}+1} = 1$$

لأن $\left(\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{\ln x} = 0\right)$

4) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\ln x}{x+3}$ شكل غير محدد من نوع "$\frac{\infty}{\infty}$"

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\ln x}{x+3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x+3}\ln x = +\infty$

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x+3} = 1$

5) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{1+\sqrt{x}}$ شكل غير محدد من نوع "$\frac{\infty}{\infty}$"

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{1+\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} \times \dfrac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}$

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} = 1$ فإنه يكفي حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}$

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)}{\sqrt{x}}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} 2\cdot\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}}$$

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}} = 0$

فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} = 0$

6) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\ln(x+2)-\ln(x+1)\right)$ شكل غير محدد من نوع "$+\infty-\infty$"

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\ln(x+2)-\ln(x-1)\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)$

نضع $t = \dfrac{x+2}{x-1}$ أي $x = \dfrac{t+2}{t-1}$ $(x\to+\infty \Leftrightarrow t\to 1)$

ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\ln(x+2)-\ln(x-1)\right) = \lim\limits_{t\to 1} (t+2)\dfrac{\ln t}{t-1} = 3\times 1 = 3$

الاشتقاق

تذكير

$\forall x\in\mathbb{R}_+^* \quad (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

$\forall x\in\mathbb{R}^* \quad (\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$

I مجال من $\mathbb{R}$
u دالة قابلة للإشتقاق على I
$\forall x\in I \quad u(x)\neq 0$
$\Rightarrow \forall x\in I \quad (\ln|u(x)|)' = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

u دالة قابلة للإشتقاق على I
$\forall x\in I \quad u(x)>0$
$\Rightarrow \forall x\in I \quad (\ln(u(x)))' = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

29 حدد مشتقات الدالة f في كل من الحالات التالية بدون تحديد مجموعة تعريفها.

1) $f(x)=\ln(x^2+x+1)$

2) $f(x)=x^2\ln x$

3) $f(x)=\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$

4) $f(x)=\dfrac{1}{\ln|x-1|}$

5) $f(x)=\ln(\ln x)$

الجواب

1) لدينا $f(x)=\ln(x^2+x+1)$

$$f'(x)=\frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1}=\frac{2x+1}{x^2+x+1}$$

2) لدينا $f(x)=x^2\ln x$

$$f'(x)=(x^2)'\ln x+x^2(\ln x)' = 2x\ln x + x^2\cdot\frac{1}{x}$$

ومنه $f'(x)=2x\ln x + x$

3) لدينا $f(x)=\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$

$$f'(x)=\frac{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'}{\frac{1+x}{1-x}}=\frac{2}{(1-x)^2}\cdot\frac{1-x}{1+x}$$

ومنه $f'(x)=\dfrac{2}{(1-x)(1+x)}$

4) لدينا $f(x)=\dfrac{1}{\ln|x-1|}$

$$f'(x)=-\frac{(\ln|x-1|)'}{(\ln|x-1|)^2}=-\frac{\frac{1}{x-1}}{(\ln|x-1|)^2}$$

ومنه $f'(x)=\dfrac{-1}{(x-1)\ln^2|x-1|}$

5) لدينا $f(x)=\ln(\ln x)$

$$f'(x)=\frac{(\ln x)'}{\ln x}=\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}$$

ومنه $f'(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$

30 حدد مشتقات الدالة f في كل من الحالات التالية :

1) $f(x)=\ln(2x+\sqrt{4x^2+1})$

2) $f(x)=\sqrt{\ln^2 x-\ln}$

3) $f(x)=\ln\left|x+3-\sqrt{x^2+1}\right|$

4) $f(x)=\dfrac{2x+3-\ln(x+2)}{x+2}$

الجواب

1) لدينا $f(x)=\ln(2x+\sqrt{4x^2+1})$

$$f'(x)=\frac{(2x+\sqrt{4x^2+1})'}{2x+\sqrt{4x^2+1}}$$

$$=\frac{2+\frac{8x}{2\sqrt{4x^2+1}}}{2x+\sqrt{4x^2+1}}$$

$$=\frac{2\sqrt{4x^2+1}+4x}{(2x+\sqrt{4x^2+1})\sqrt{4x^2+1}}=\frac{2(2x+\sqrt{4x^2+1})}{\sqrt{4x^2+1}(2x+\sqrt{4x^2+1})}$$

ومنه $f'(x)=\frac{2}{\sqrt{4x^2+1}}$

2) لدينا $f(x)=\sqrt{\ln^2x-\ln x}$

$$f'(x)=\frac{(\ln^2x-\ln x)'}{2\sqrt{\ln^2x-\ln x}}=\frac{\frac{2\ln x}{x}-\frac{1}{x}}{2\sqrt{\ln^2x-\ln x}}$$

ومنه $f'(x)=\frac{2\ln x-1}{2x\sqrt{\ln^2x-\ln x}}$

3) لدينا $f(x)=\ln|x+3-\sqrt{x^2+1}|$

$$f'(x)=\frac{(x+3-\sqrt{x^2+1})'}{x+3-\sqrt{x^2+1}}=\frac{1-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+3-\sqrt{x^2+1}}$$

ومنه $f'(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}(x+3-\sqrt{x^2+1})}$

الدوال الأصلية

تذكير

$x\mapsto \ln|u(x)|$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto\frac{u'(x)}{u(x)}$ على مجال I. $\forall x\in I\quad u(x)\neq 0$

31 في كل حالة من الحالات التالية: بين أن الدالة f تقبل دالة أصلية F على المجال I ثم حدد F

1) $f(x)=\frac{1}{2-x}+\frac{1}{x}$ ، $I=]2,+\infty[$

2) $f(x)=\frac{3}{2x+1}$ ، $I=]-\infty,-\frac{1}{2}[$

3) $f(x)=\frac{2x-1}{x^2-x+1}$ ، $I=\mathbb{R}$

4) $f(x)=\frac{x+1}{x^2+2x+5}$ ، $I=\mathbb{R}$

الجواب

f دالة جذرية فهي متصلة على D_f وبالخصوص على المجال I ومنه f تقبل دالة أصلية F على I.

1) لدينا $f(x)=\frac{1}{2-x}+\frac{1}{x}$ ، $I=]2,+\infty[$

$$f(x)=-\frac{(2-x)'}{2-x}+\frac{(x)'}{x}$$

ومنه $F(x)=-\ln|2-x|+\ln|x|+c$

أي $F(x)=-\ln(x-2)+\ln x+c$

$F(x)=\ln\left(\frac{x}{x-2}\right)+c$ حيث $c\in\mathbb{R}$

2) لدينا $f(x)=\frac{3}{2x+1}=\frac{3}{2}\cdot\frac{(2x+1)'}{2x+1}$ ، $I=]-\infty,-\frac{1}{2}[$

$F(x)=\frac{3}{2}\ln|2x+1|+c$ حيث $c\in\mathbb{R}$

3) لدينا $f(x)=\frac{2x-1}{x^2-x+1}=\frac{(x^2-x+1)'}{x^2-x+1}$ ، $I=\mathbb{R}$

ومنه $F(x)=\ln|x^2-x+1|+c$ حيث $c\in\mathbb{R}$

أي $F(x)=\ln(x^2-x+1)+C$

4) لدينا $f(x)=\frac{x+1}{x^2+2x+5}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2+2x+5)'}{x^2+2x+5}$ ، $I=\mathbb{R}$

ومنه $F(x)=\frac{1}{2}\ln|x^2+2x+5|+c$ حيث $c\in\mathbb{R}$

32

حدد في كل حالة من الحالات التالية دالة أصلية F للدالة f على المجال I .

1) $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ ، $I=\mathbb{R}$

2) $f(x)=\frac{4x-2}{1-x+x^2}$ ، $I=\mathbb{R}$

3) $f(x)=\frac{\cos x}{\sin x}$ ، $I=]0,\frac{\pi}{2}[$

4) $f(x)=\tan x$ ، $I=]0,\frac{\pi}{2}[$

الجواب

1) $f(x)=\frac{x}{x^2+1}=\frac{1}{2}\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}$ ، $I=\mathbb{R}$

ومنه $F(x)=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$ حيث $C\in\mathbb{R}$

$F(x)=\ln(\sqrt{x^2+1})+C$ حيث $C\in\mathbb{R}$

2) لدينا $f(x)=\frac{4x-2}{1-x+x^2}=2\frac{(x^2-x+1)'}{x^2-x+1}$ ، $I=\mathbb{R}$

ومنه $F(x)=2\ln(x^2-x+1)+C$ حيث $C\in\mathbb{R}$

3) لدينا $f(x)=\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{(\sin x)'}{\sin x}$ ، $I=]0,\frac{\pi}{2}[$

ومنه $F(x)=\ln(\sin x)+C$ حيث $C\in\mathbb{R}$

4) لدينا $f(x)=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=-\frac{(\cos x)'}{\cos x}$ ، $I=]0,\frac{\pi}{2}[$

ومنه $F(x)=-\ln(\cos x)+C$. حيث $C\in\mathbb{R}$

33

حدد في كل حالة من الحالات التالية دالة أصلية F للدالة f على المجال I .

1) $f(x)=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$ ، $I=]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}[$

2) $f(x)=\frac{1+\tan^2 x}{\tan x}$ ، $I=]0,\frac{\pi}{2}[$

3) $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ ، $I=]0,+\infty[$

4) $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$ ، $I=]1,+\infty[$

الجواب 1) لدينا $f(x)=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$ ، $I=]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}[$

$$=\frac{(\sin x-\cos x)'}{\sin x-\cos x}$$

ومنه $F(x)=\ln|\sin x-\cos x|+C$ حيث $C\in\mathbb{R}$

2) لدينا $f(x)=\frac{1+\tan^2 x}{\tan x}=\frac{(\tan x)'}{\tan x}$ ، $I=]0,\frac{\pi}{2}[$

ومنه $F(x)=\ln(\tan x)+C$ حيث $C\in\mathbb{R}$

3) لدينا $f(x)=\frac{\ln x}{x}=\ln x(\ln x)'$ ، $I=]0,+\infty[$

ومنه $F(x)=\frac{1}{2}\ln^2 x+C$ حيث $C\in\mathbb{R}$

4) لدينا $f(x)=\frac{1}{x\ln x}=\frac{(\ln x)'}{\ln x}$ ، $I=]1,+\infty[$

ومنه $F(x)=\ln(\ln x)+C$ حيث $C\in\mathbb{R}$

34 لتكن f و g الدالتين العدديتين للمتغير الحقيقي x المعرفتين على المجال $I=]0,+\infty[$ بمايلي :

$$f(x)=x\ln x$$
$$g(x)=\ln x$$

1) احسب $f'(x)$ لكل x من I .

2) استنتج دالة أصلية للدالة g على المجال I .

<u>الجواب</u> 1) ليكن x من I لدينا $f(x)=x\ln x$

$$f'(x)=(x)'\ln x+x(\ln x)'$$
$$f'(x)=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x-1$$

2) لدينا لكل x من I $\quad f'(x)=\ln x+1$

إذن $\quad \ln x=f'(x)-1$

أي $\quad g(x)=(f(x)-x)'$

ومنه $F \quad x\mapsto f(x)-x$ هي دالة أصلية للدالة g

على المجال I منه $\quad \forall x\in I \quad F(x)=x\ln x-x$

35 حدد دالة أصلية F للدالة f على المجال I في كل من الحالتين التاليتين :

$I=]0,+\infty[\qquad f(x)=\dfrac{1}{(x^2+1)\text{Arctan}x}$

$I=]0,+\infty[\qquad f(x)=\dfrac{1}{x(1+\ln^2x)}$

<u>الجواب</u> 1) لدينا $\quad I=]0,+\infty[\quad f(x)=\dfrac{1}{(x^2+1)\text{Arctan}x}$

$$=\frac{(\text{Arctan}x)'}{\text{Arctan}x}$$

ومنه $\quad F(x)=\ln(\text{Arctan}x)+C$ حيث $C\in\mathbb{R}$

2) لدينا $\quad I=]0,+\infty[\quad f(x)=\dfrac{1}{x(1+\ln^2x)}=\dfrac{(\ln(x))'}{1+(\ln(x))^2}$

ومنه $\quad F(x)=\text{Arctan}|\ln(x)|+C$ حيث $C\in\mathbb{R}$

36 لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $I=]-\frac{1}{2},+\infty[$ بمايلي : $\quad f(x)=\dfrac{2x^2-x-2}{2x^2+3x+1}$

1) حدد الأعداد الحقيقية a و b و c بحيث

$$\forall x\in I \qquad f(x)=a+\frac{b}{2x+1}+\frac{c}{x+1}$$

2) استنتج الدالة الأصلية F للدالة f على المجال I بحيث : $\quad F(0)=-1$

<u>الجواب</u> 1) لنحدد a و b و c بحيث: $\quad f(x)=a+\dfrac{b}{2x+1}+\dfrac{c}{x+1}$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2-x-2}{2x^2+3x+1}=\frac{a(2x+1)(x+1)+b(x+1)+c(2x+1)}{(2x+1)(x+1)}$$
$$=\frac{2ax^2+3ax+a+bx+b+2cx+c}{2x^2+3x+1}$$
$$=\frac{2ax^2+(3a+b+2c)x+a+b+c}{2x^2+3x+1}$$
$$\Leftrightarrow 2x^2-x-2=2ax^2+(3a+b+2c)x+a+b+c$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}2a=2\\3a+b+2c=-1\\a+b+c=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b+2c=-4\\b+c=-3\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}a=1\\b=-2\\c=-1\end{cases}$$

2) لدينا $\quad \forall x\in I \quad f(x)=1-\dfrac{2}{2x+1}-\dfrac{1}{x+1}$

ومنه $\quad F(x)=x-\ln(2x+1)-\ln(x+1)+K$ حيث $K\in\mathbb{R}$

بما أن $F(0)=-1$ فإن $\quad 0-\ln(1)-\ln(1)+K=-1$

إذن $K=-1$ ومنه $\quad \forall x\in I \quad F(x)=x-\ln(2x+1)-\ln(x+1)-1$

37

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $I=]-\infty,-1[$ بما يلي :

$$f(x)=\frac{x^2-2x}{(x+1)^2}$$

1) حدد الأعداد الحقيقية a و b و c بحيث :

$$\forall x\in I \quad f(x)=a+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{(x+1)^2}$$

2) استنتج الدالة الأصلية F للدالة f على I بحيث :

$$F(-2)=1$$

الجواب 1) لنحدد a و b و c بحيث لكل x من I

$$f(x)=a+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{(x+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-2x}{(x+1)^2}=\frac{a(x+1)^2+b(x+1)+c}{(x+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x=a(x^2+2x+1)+bx+b+c$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x=ax^2+(2a+b)x+a+b+c$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ 2a+b=-2 \\ a+b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-4 \\ c=3 \end{cases}$$

2) لدينا $\forall x\in I \quad f(x)=1-\frac{4}{x+1}+\frac{3}{(x+1)^2}$

ومنه $F(x)=x-4\ln|x+1|-\frac{3}{x+1}+K$ حيث $K\in\mathbb{R}$

بما أن $F(-2)=1$ فإن $-2-4\ln|-2+1|+3+K=1$

$\Leftrightarrow 1-4\ln 1+K=1 \Leftrightarrow K=0$

ومنه $\forall x\in I \quad F(x)=x-4\ln|x+1|-\frac{3}{x+1}$

38

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $I=]-\infty,1[$ بما يلي : $f(x)=\frac{x^2-2x-2}{x^3-1}$

1) حدد الأعداد الحقيقية a و b و c بحيث

$$\forall x\in I \quad f(x)=\frac{a}{x-1}+\frac{bx+c}{x^2+x+1}$$

2) حدد الدالة الأصلية F للدالة f على المجال I بحيث :

$$F(-1)=\ln 2$$

الجواب 1) لنحدد a و b و c بحيث لكل x من I

$$f(x)=\frac{a}{x-1}+\frac{bx+c}{x^2+x+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-2x-2}{x^3-1}=\frac{a(x^2+x+1)+(x-1)(bx+c)}{x^3-1}$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x-2=ax^2+ax+a+bx^2+cx-bx-c$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x-2=(a+b)x^2+(a-b+c)x+a-c$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ a-b+c=-2 \\ a-c=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ 2a+c=-1 \\ a-c=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=2 \\ c=1 \end{cases}$$

2) لدينا $\forall x\in I \quad f(x)=-\frac{1}{x-1}+\frac{2x+1}{x^2+x+1}$

ومنه $F(x)=-\ln|x-1|+\ln|x^2+x+1|+K$ حيث $K\in\mathbb{R}$

$$F(x)=-\ln(1-x)+\ln(x^2+x+1)+K$$

بما أن $F(-1)=\ln 2$ فإن $-\ln 2+\ln 1+K=\ln 2$

إذن $K=2\ln 2$.

ومنه $\forall x\in I \quad F(x)=-\ln(1-x)+\ln(x^2+x+1)+2\ln 2$

أي $F(x)=\ln\left(\frac{x^2+x+1}{1-x}\right)+2\ln 2$

الدوال اللوغاريتمية للأساس a

ليكن a عدداً حقيقياً موجب قطعاً بحيث : $a \neq 1$.

الدالة $x \mapsto \frac{\ln x}{\ln a}$ المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ ؛ نسمي دالة اللوغاريتم للأساس a و يرمز لها بـ : $\log_a$. $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$

لكل x و y من $\mathbb{R}_+^*$ ولكل r من $\mathbb{Q}$ لدينا :

$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ $\quad$ $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

$\log_a(x^r) = r\log_a x$ $\quad$ $\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a x$

اللوغاريتم العشري

الدالة اللوغاريتمية التي أساسها $a=10$ ؛ نسمي دالة اللوغاريتم العشري و يرمز لها بـ : log

$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$ $\quad$ $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$

$\log 10 = 1$ $\quad$ $\left(m = \frac{1}{\ln 10} \simeq 0,434\right)$

العمليات الجبرية

39 اختزل التعابير التالية :

$$A = \log_a\left(\log_a(a)^{a^{2001}}\right)$$

$$B = \frac{\left(\log_a\left(a^{(\log_a b)}\right)\right)^3}{\log_b\left(a^{(\log_a b)^4}\right)}$$

حيث a و b من $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$

الجواب لدينا $A = \log_a\left(\log_a(a)^{a^{2001}}\right)$

$$= \log_a\left(a^{2001}\cdot\log_a(a)\right) = \log_a\left(a^{2001}\right) = 2001\log_a a$$

ومنه $A = 2001$

لدينا $B = \frac{\left(\log_a\left(a^{(\log_a b)}\right)\right)^3}{\log_b\left(a^{(\log_a(b))^4}\right)}$

$$= \frac{\left(\log_a(b)\log_a(a)\right)^3}{(\log_a(b))^4\log_b(a)} = \frac{(\log_a(b))^3}{(\log_a(b))^4\log_b(a)}$$

ومنه $B = \frac{1}{(\log_a(b))(\log_b(a))}$

المعادلات

40 حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

1) $\log_3 x \log_9 x = \frac{1}{2}$

2) $\log_x(6x-5) = 2$

3) $\log_{\sqrt{2}} x = 2$

الجواب 1) لدينا (1) $\log_3 x \log_9 x = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln x}{\ln 3}\times\frac{\ln x}{\ln 9} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\ln^2 x}{\ln 3 \ln 3^2} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln^2 x}{2\ln^2 3} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln^2 x = \ln^2 3$$

$\Leftrightarrow \ln x = -\ln 3$ أو $\ln x = \ln 3$

$\Leftrightarrow \ln x = \ln\frac{1}{3}$ أو $\ln x = \ln 3 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$ أو $x = 3$

ومنه مجموعة حلول المعادلة (1) هي $S_1 = \left\{\frac{1}{3}, 3\right\}$

٢) لدينا (2) $\log_x(6x-5)=2$

لتكن D_2 مجموعة تعريف المعادلة (2) و S_2 مجموعة حلولها.

لدينا $x\in D_2 \Leftrightarrow x>0$ و $x\neq 1$ و $6x-5>0$

$\Leftrightarrow x>0$ و $x\neq 1$ و $x>\frac{5}{6}$

$\Leftrightarrow x>\frac{5}{6}$

ومنه $D_2=\left]\frac{5}{6},+\infty\right[$

$x\in S_2 \Leftrightarrow \log_x(6x-5)=2$

$\Leftrightarrow \frac{\ln(6x-5)}{\ln x}=2$ و $x\in D_2$

$\Leftrightarrow \ln(6x-5)=2\ln x=\ln x^2$ و $x\in D_2$

$\Leftrightarrow 6x-5=x^2$ و $x\in D_2$

$\Leftrightarrow x^2-6x+5=0$ و $x\in D_2$

$\Leftrightarrow (x-1)(x-5)=0$ و $x\in D_2$

$\Leftrightarrow x-1=0$ أو $x-5=0$ و $x\in D_2$

$\Leftrightarrow x=1$ أو $x=5$ و $x\in D_2$

$\Leftrightarrow x=5$

ومنه $S_2=\{5\}$

٣) لدينا (3) $\log_{\sqrt{2}}x=2 \Leftrightarrow \frac{\ln x}{\ln\sqrt{2}}=2$

$\Leftrightarrow \ln x=2\ln\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \ln x=\ln 2$

$\Leftrightarrow x=2$

ومنه مجموعة المعادلة (3) هي:

$S_3=\{2\}$

المتراجحات

تذكير

ليكن a عددا حقيقيا موجبا قطعا بحيث $a\neq 1$

لكل x و y من $\mathbb{R}_+^*$ لدينا

$0<a<1$	$a>1$
$\log_a x<\log_a y \Leftrightarrow x>y$	$\log_a x<\log_a y \Leftrightarrow x<y$

41 حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية :

1) $\log_3 x-\log_3(2x-1)<0$

2) $\log_{\frac{1}{3}} x-\log_{\frac{1}{3}}(2x-1)<0$

الجواب 1) لدينا (1) $\log_3 x-\log_3(2x-1)<0$

$\Leftrightarrow \log_3 x<\log_3(2x-1)$ و $x>\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x<2x-1$ و $x>\frac{1}{2}$ (لأن $3>1$)

$\Leftrightarrow 1<x$ و $x>\frac{1}{2}$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة (1) هي

$S_1=]1,+\infty[$

٢) لدينا (2) $\log_{\frac{1}{3}} x-\log_{\frac{1}{3}}(2x-1)<0$

$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}} x<\log_{\frac{1}{3}}(2x-1)$ و $x>\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x>2x-1$ و $x>\frac{1}{2}$ (لأن $0<\frac{1}{3}<1$)

$\Leftrightarrow x<1$ و $x>\frac{1}{2}$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة هي : $S_2=\left]\frac{1}{2},1\right[$

42

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة :

$$\log_2 x > \log_8(3x-2)$$

الجواب لدينا $\log_2 x > \log_8(3x-2)$ (E)

لتكن D مجموعة تعريف المتراجحة (E) و S مجموعة حلولها

$x \in D \Leftrightarrow x>0$ و $3x-2>0$

$\Leftrightarrow x>0$ و $x>\frac{2}{3}$

ومنه $D =]\frac{2}{3},+\infty[$

$x \in S \Leftrightarrow \log_2 x > \log_8(3x-2)$ و $x \in D$

$\Leftrightarrow \frac{\ln x}{\ln 2} > \frac{\ln(3x-2)}{\ln 8}$ و $x \in D$

$\Leftrightarrow \frac{\ln x}{\ln 2} > \frac{\ln(3x-2)}{3\ln 2}$ و $x \in D$ (لأن $8=2^3$)

$\Leftrightarrow 3\ln x > \ln(3x-2)$ و $x \in D$

$\Leftrightarrow \ln x^3 > \ln(3x-2)$ و $x \in D$

$\Leftrightarrow x^3 > 3x-2$ و $x \in D$

$\Leftrightarrow x^3-3x+2>0$ و $x \in D$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-2)>0$ و $x \in D$

$\Leftrightarrow (x-1)^2(x+2)>0$ و $x \in D$

$\Leftrightarrow x-1 \neq 0$ و $x+2>0$ و $x \in D$ (لأن $(x-1)^2 \geq 0$)

$\Leftrightarrow x \neq 1$ و $x>-2$ و $x \in D$

$\Leftrightarrow x \neq 1$ و $x \in D$

ومنه $S =]\frac{2}{3},1[\cup]1,+\infty[$

43

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية :

1) $\log_3 x \geq 1$

2) $\log_{\frac{1}{5}}(x-2) < 1$

3) $\log_2(x) \geq \log_x(2)$

4) $\log_x($[illegible]$) > \ln x$

الجواب 1) لنحل المتراجحة $\log_3 x \geq 1$ (1)

$\Leftrightarrow \log_3 x \geq \log_3(3)$

$\Leftrightarrow x \geq 3$ (لأن $3>1$)

ومنه مجموعة حلول المتراجحة (1) هي :

$S_1 = [3,+\infty[$

2) لنحل المتراجحة $\log_{\frac{1}{5}}(x-2) < 1$ (2)

$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{5}}(x-2) < \log_{\frac{1}{5}}(\frac{1}{5})$ و $x-2>0$

$\Leftrightarrow x-2 > \frac{1}{5}$ و $x>2$ (لأن $0<\frac{1}{5}<1$)

$\Leftrightarrow x > \frac{1}{5}$ و $x>2$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة (2) هي :

$S_2 =]2,+\infty[$

3) لنحل المتراجحة $\log_2(x) \geq \log_x(2)$ (3)

$\Leftrightarrow \frac{\ln x}{\ln 2} \geq \frac{\ln 2}{\ln x}$ و $x>0$ و $x \neq 1$

$\Leftrightarrow \frac{\ln^2 x - \ln^2 2}{\ln 2 \ln x} \geq 0$ و $x>0$ و $x \neq 1$

$\Leftrightarrow \frac{(\ln x - \ln 2)(\ln x + \ln 2)}{\ln 2 \ln x} \geq 0$ و $x>0$ و $x \neq 1$

لدينا $\ln 2 > 0$ (لأن $2>1$)

x	0		$\frac{1}{2}$		1		2		$+\infty$
$\ln x - \ln 2$	‖	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\ln x + \ln 2$	‖	$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\ln x$	‖	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{\ln^2 x - \ln^2 2}{\ln 2 \ln x}$	‖	$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

ومنه مجموعة حلول المتراجحة (3) هي :

$$S_3 = \left[\frac{1}{2}, 1\right[\cup [2, +\infty[$$

4) لنحل المتراجحة

$$(4) \quad \log_x(e) > \ln x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln e}{\ln x} - \ln x > 0 \text{ و } x > 0 \text{ و } x \neq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - \ln^2 x}{\ln x} > 0 \text{ و } x > 0 \text{ و } x \neq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1+\ln x)(1+\ln x)}{\ln x} > 0 \text{ و } x > 0 \text{ و } x \neq 1$$

x	0		$\frac{1}{e}$		1		e		$+\infty$
$1 + \ln x$	‖	$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$1 - \ln x$	‖	$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$\ln x$	‖	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{1 - \ln^2 x}{\ln x}$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	

ومنه مجموعة حلول المتراجحة (4) هي :

$$S_4 = \left]0, \frac{1}{e}\right[\cup]1, e[$$

44 احسب مشتقات الدوال التالية بدون تحديد مجموعة تعريفها

$$f_1(x) = \log_2(x)$$

$$f_2(x) = \log_{x+1}(x)$$

$$f_3(x) = \log_{\sqrt{x}}(2x-1)$$

الجواب 1) لدينا

$$f_1(x) = \log_2 x = \frac{\ln x}{\ln 2}$$

ومنه

$$f_1'(x) = \frac{1}{x \ln 2}$$

2) لدينا

$$f_2(x) = \log_{x+1} x = \frac{\ln x}{\ln(x+1)}$$

$$f_2'(x) = \frac{(\ln x)' \ln(x+1) - \ln x (\ln(x+1))'}{(\ln(x+1))^2}$$

$$f_2'(x) = \frac{\frac{\ln(x+1)}{x} - \frac{\ln x}{x+1}}{(\ln(x+1))^2}$$

ومنه

$$f_2'(x) = \frac{(x+1)\ln(x+1) - x\ln x}{x(x+1)(\ln(x+1))^2}$$

3) لدينا

$$f_3(x) = \log_{\sqrt{x}}(2x-1) = \frac{\ln(2x-1)}{\ln\sqrt{x}}$$

$$= \frac{\ln(2x-1)}{\frac{1}{2}\ln x} = 2\frac{\ln(2x-1)}{\ln x}$$

$$f_3'(x) = 2\frac{\frac{2\ln x}{2x-1} - \frac{\ln(2x-1)}{x}}{(\ln x)^2}$$

ومنه

$$f_3'(x) = \frac{2(2x\ln x - (2x-1)\ln(2x-1))}{x(2x-1)\ln^2 x}$$

المتتاليات المعرفة بـ Ln

45

1) لتكن (u_n) متتالية هندسية متقاربة بحيث:

$$u_2 = 8 \quad \text{و} \quad u_2+u_3+u_4 = 14$$

حدد الأساس q للمتتالية (u_n) والحد الأول u_0.

2) لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة كمايلي:

$$v_n = \ln(u_n) \qquad n\in\mathbb{N}$$

أ- حدد طبيعة المتتالية (v_n).

ب- حدد رتابة المتتالية (v_n).

ج- احسب بدلالة n المجموع $v_0+v_1+\dots+v_{n-1}$

3) لتكن (w_n) المتتالية العددية المعرفة كمايلي:

$$\begin{cases} w_0 = u_0 \\ w_n = u_0\times u_1\times u_2\times\dots\times u_n \quad , n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

أ- احسب w_n بدلالة n.

ب- حدد نهاية المتتالية (w_n).

الجواب 1) حساب الأساس q و u_0.

لدينا
$$\begin{cases} u_2 = 8 & (1) \\ u_2+u_3+u_4 = 14 & (2) \end{cases}$$

ولدينا $u_3 = qu_2 = 8q$ و $u_4 = q^2u_2 = 8q^2$

إذن العلاقة (2) تكافئ $8+8q+8q^2 = 14$

$\Leftrightarrow 4q^2-4q-3=0 \Leftrightarrow q=\frac{1}{2}$ أو $q=-\frac{3}{2}$

بما أن (u_n) متتالية متقاربة فإن $q=\frac{1}{2}$ $(-1<q<1)$

ولدينا $u_2 = q^2.u_0$ أي $u_0 = \frac{u_2}{q^2} = \frac{8}{\frac{1}{4}}$

ومنه $u_0 = 32$

وبالتالي $u_0=32$ و $q=\frac{1}{2}$.

2) لدينا لكل n من $\mathbb{N}$ $v_n = \ln(u_n)$

أ- طبيعة المتتالية (v_n).

لدينا $\forall n\in\mathbb{N}$ $v_{n+1}-v_n = \ln(u_{n+1})-\ln(u_n) = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$

$\forall n\in\mathbb{N}$ $v_{n+1}-v_n = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$ (لأن $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n$)

ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها $r=-\ln 2$ وحدها الأول $v_0=\ln(u_0)=\ln 32$ أي $v_0=5\ln 2$

ب- رتابة المتتالية (v_n)

لدينا $\forall n\in\mathbb{N}$ $v_{n+1}-v_n = -\ln 2 < 0$

ومنه (v_n) متتالية تناقصية قطعا.

ج- لدينا $v_0+v_1+\dots+v_{n-1} = \frac{n}{2}(v_0+v_{n-1})$

لدينا $v_0 = 5\ln 2$ و $v_{n-1} = v_0+(n-1)r$

$$v_{n-1} = 5\ln 2-(n-1)\ln 2 = (6-n)\ln 2$$

ومنه
$$v_0+v_1+\dots+v_{n-1} = \frac{n(11-n)\ln 2}{2}$$

3) لدينا
$$\begin{cases} w_0 = u_0 \\ w_n = u_0\times u_1\times\dots\times u_n \quad , n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

أ- حساب w_n بدلالة n.

لدينا
$$\ln(w_n) = \ln(u_0)+\ln(u_1)+\dots+\ln(u_n)$$
$$= v_0+v_1+\dots+v_n$$
$$= \frac{(n+1)(v_0+v_n)}{2}$$

$$\ln(w_n) = \frac{(n+1)(10-n)\ln 2}{2}$$

ومنه
$$w_n = e^{\frac{(n+1)(10-n)\ln 2}{2}}$$

ب- نهاية المتتالية (w_n)

بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(n+1)(10-n)\ln 2}{2} = -\infty$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$

46

لتكن $(u_n)_{n\geq1}$ المتتالية العددية المعرفة بمايلي :

$$\forall n\in\mathbb{N}^* \quad u_n=\ln\frac{n+1}{n}$$

1) احسب $u_{n+1}-u_n$ واستنتج أن (u_n) متتالية تناقصية .

2) نضع $v_n=u_1+u_2+\dots+u_n$ $\quad n\in\mathbb{N}^*$

أ- احسب v_n بدلالة n .

ب- حدد نهاية المتتالية (u_n) ، هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟

3) نضع $w_n=u_n+u_{n+1}+\dots+u_{2n}$ $\quad n\in\mathbb{N}^*$

أ- احسب w_n بدلالة n.

ب- حدد نهاية المتتالية (w_n) . هل المتتالية (w_n) متقاربة ؟

الجواب 1) ليكن n من $\mathbb{N}^*$ لدينا

$$u_{n+1}-u_n=\ln\frac{n+2}{n+1}-\ln\frac{n+1}{n}$$

$$u_{n+1}-u_n=\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\times\frac{n}{n+1}\right)=\ln\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)$$

لنستنتج $(u_n)_{n\geq1}$ متتالية تناقصية .

لدينا $u_{n+1}-u_n=\ln\left(\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}\right)$

$$=\ln\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

بما أن $0<1-\frac{1}{(n+1)^2}<1$ فإن $\ln\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)<0$

إذن $u_{n+1}-u_n$ $\quad \forall n\in\mathbb{N}$

ومنه $(u_n)_{n\geq1}$ متتالية تناقصية .

2) لدينا $v_n=u_1+u_2+\dots+u_n$ $\quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

أ- حساب v_n بدلالة n

لدينا $v_n=\ln2+\ln\frac{3}{2}+\dots+\ln\frac{n+1}{n}$ $\quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

$$v_n=\ln\left(2\times\frac{3}{2}\times\dots\times\frac{n+1}{n}\right)$$

ومنه $v_n=\ln(n+1)$ $\quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

ب- بما أن $\lim_{n\to+\infty}(n+1)=+\infty$ فإن $\lim_{n\to+\infty}v_n=+\infty$

ومنه المتتالية $(v_n)_{n\geq1}$ غير متقاربة .

3) لدينا $w_n=u_n+u_{n+1}+\dots+u_{2n}$ $\quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

أ- حساب w_n بدلالة n.

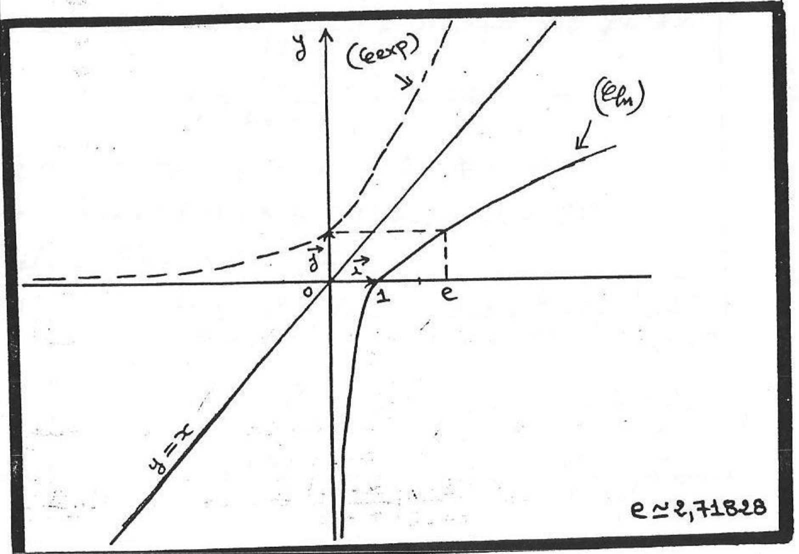
لدينا $w_n=\ln\frac{n+1}{n}+\ln\frac{n+2}{n+1}+\dots+\ln\frac{2n+1}{2n}$

$$w_n=\ln\left(\frac{n+1}{n}\times\frac{n+2}{n+1}\times\dots\times\frac{2n+1}{2n}\right)$$

ومنه $w_n=\ln\frac{2n+1}{n}$ $\quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

ب- بما أن $\lim_{n\to+\infty}\frac{2n+1}{n}=2$ فإن $\lim_{n\to+\infty}w_n=\ln2$

ومنه $(w_n)_{n\geq1}$ متقاربة .



دراسة الدوال المعرفة بـ Ln

47 نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي

$$f(x)=x+4+\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|$$

1) أ- حدد حيز تعريف الدالة f : D_f

ب- حدد نهايات الدالة f عند محدات D_f .

2) ادرس تغيرات الدالة f .

3) أ- بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته : $y=x+4$ مقارب مائل للمنحنى (C_f).

ب- ادرس الوضع النسبي للمستقيم (Δ) بالنسبة للمنحنى (C_f).

4) أنشئ المنحنى (C_f) في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

الجواب 1) أ- تحديد D_f :

ليكن x عددا حقيقيا لدينا $x\in D_f \iff x+2\neq0$ و $\left|\frac{x-2}{x+2}\right|>0$

$\iff x\neq-2$ و $\frac{x-2}{x+2}\neq0$

$\iff x\neq-2$ و $x-2\neq0 \iff x\neq-2$ و $x\neq2$

ومنه $D_f=]-\infty,-2[\cup]-2,2[\cup]2,+\infty[$

ب- نهايات f عند محدات D_f

- لدينا $\lim_{|x|\to+\infty}\frac{x-2}{x+2}=1$ إذن $\lim_{|x|\to+\infty}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|=\ln1=0$

ومنه $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

- لدينا $\lim_{x\to-2}\left|\frac{x-2}{x+2}\right|=+\infty$ إذن $\lim_{x\to-2}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|=+\infty$

و منه $\lim_{x\to-2}f(x)=+\infty$

- لدينا $\lim_{x\to2}\left|\frac{x-2}{x+2}\right|=0^+$ إذن $\lim_{x\to2}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|=-\infty$

و $\lim_{x\to2}f(x)=-\infty$

2) دراسة تغيرات الدالة f .

الدالة f قابلة للإشتقاق على D_f ولكل x من D_f لدينا

$$f'(x)=1+\frac{\left(\frac{x-2}{x+2}\right)'}{\frac{x-2}{x+2}}=1+\frac{\frac{4}{(x+2)^2}}{\frac{x-2}{x+2}}$$

$$f'(x)=1+\frac{4}{(x+2)(x-2)}=\frac{x^2}{x^2-4}$$

إشارة $f'(x)$ هي إشارة x^2-4 على D_f

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	0	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	4	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

3) أ- لنبين أن المستقيم (Δ) $y=x+4$ مقارب مائل للمنحنى (C_f)

لدينا $\lim_{|x|\to+\infty}f(x)-(x+4)=\lim_{|x|\to+\infty}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|=\ln(1)=0$

ومنه المستقيم (Δ) $y=x+4$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$ و $+\infty$.

ب- وضع المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ).

لندرس إشارة $f(x)-(x+4)$.

لدينا لكل x من D_f : $f(x)-(x+4)=\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|$

- إذا كان $x>0$ فإن $\left|\frac{x-2}{x+2}\right|<1$ إذن $\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|<0$

ومنه $(\mathscr{C}_f)$ يوجد تحت المستقيم (Δ) .

- إذا كان $x>0$ فإن $\left|\frac{x-2}{x+2}\right|>1$ إذن $\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|>0$

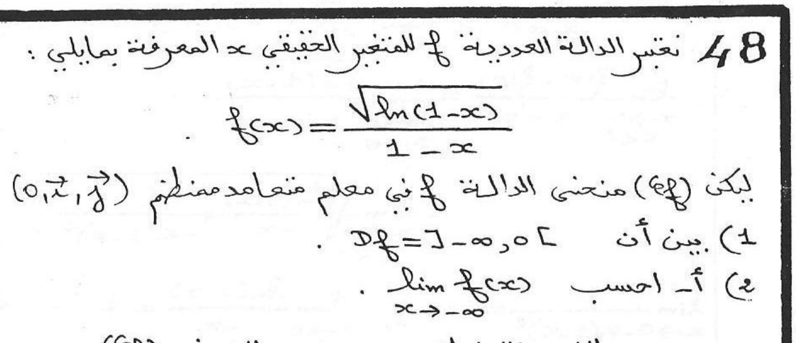
ومنه $(\mathscr{C}_f)$ يوجد فوق المستقيم (Δ) .

4) إنشاء $(\mathscr{C}_f)$.

$y=x+4$

$(\mathscr{C}_f)$

-2 $\vec{j}$ 2 0 $\vec{i}$ 4



48 نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي :

$$f(x)=\frac{\sqrt{\ln(1-x)}}{1-x}.$$

ليكن $(\mathscr{C}_f)$ منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) بين أن $D_f=]-\infty,0[$.

2) أ - احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

ب - حدد الفرع اللانهائي عند $+\infty$ للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$.

3) أ - ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليسار في $x_0=0$.

أول النتيجة هندسيًا .

ب - ادرس تغيرات الدالة f .

4) أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$. $(\sqrt{e}\simeq1{,}6$ و $e\simeq2{,}7)$

الجواب 1) لنبين أن $D_f=]-\infty,0[$

ليكن x عددًا حقيقيًا لدينا

$$x\in D_f \Leftrightarrow 1-x>0 \text{ و } \ln(1-x)>0$$

$$\Leftrightarrow x<1 \text{ و } 1-x>1$$

$$\Leftrightarrow x<1 \text{ و } x<0 \Leftrightarrow x<0$$

ومنه $D_f=]-\infty,0[$

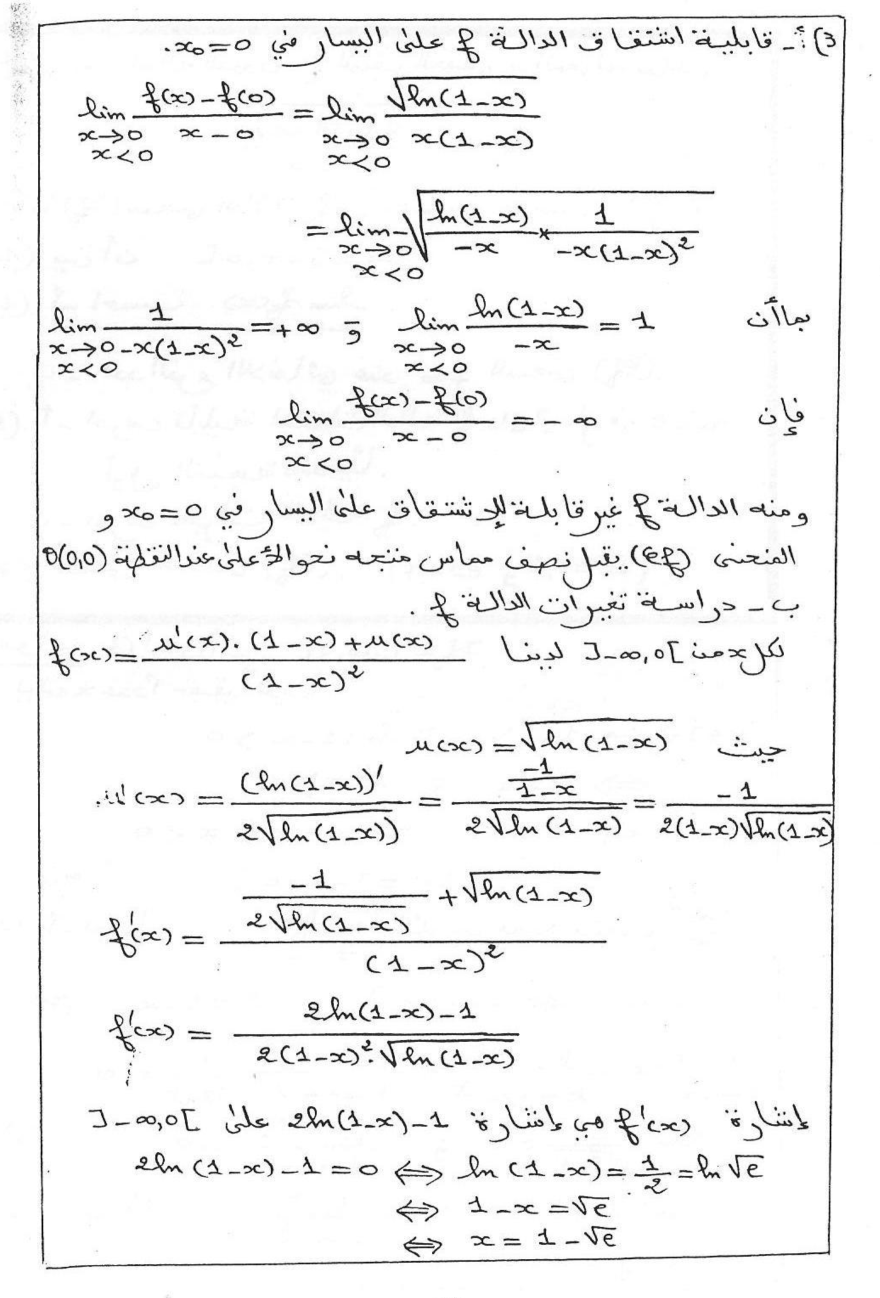
2) أ - لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ شكل غير محدد من نوع $\frac{\infty}{\infty}$ "

نضع $t=1-x$ $(x\to-\infty \Leftrightarrow t\to+\infty)$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{t\to+\infty}\frac{\sqrt{\ln t}}{t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}\cdot\frac{1}{\sqrt{\ln t}}=0$$

(لأن $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}=0$ و $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\ln t}}=0$)

ب - بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$ فإن المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مقارب أفقي معادلته $y=0$ بجوار $-\infty$



3) أ- قابلية اشتقاق الدالة f على اليسار في $x_0=0$.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{\sqrt{\ln(1-x)}}{x(1-x)}$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}-\sqrt{\frac{\ln(1-x)}{-x}\times\frac{1}{-x(1-x)^2}}$$

بما أن $\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{\ln(1-x)}{-x}=1$ و $\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{1}{-x(1-x)^2}=+\infty$

فإن $\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-\infty$

ومنه الدالة f غير قابلة للإشتقاق على اليسار في $x_0=0$ و المنحنى (C_f) يقبل نصف مماس منتجه نحو الأعلى عند النقطة $O(0,0)$

ب- دراسة تغيرات الدالة f.

لكل x من $]-\infty,0[$ لدينا $f'(x)=\frac{u'(x).(1-x)+u(x)}{(1-x)^2}$

حيث $u(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$

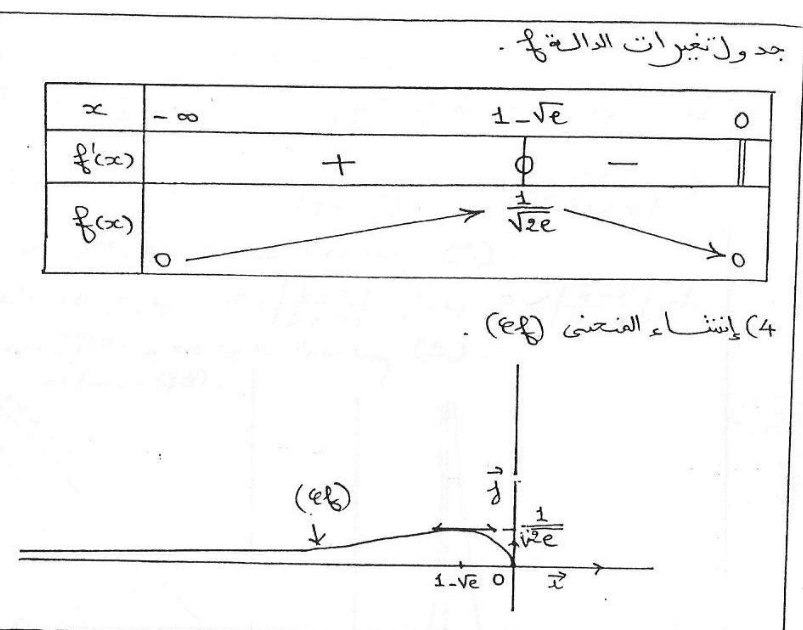
$$u'(x)=\frac{(\ln(1-x))'}{2\sqrt{\ln(1-x)}}=\frac{\frac{-1}{1-x}}{2\sqrt{\ln(1-x)}}=\frac{-1}{2(1-x)\sqrt{\ln(1-x)}}$$

$$f'(x)=\frac{\frac{-1}{2\sqrt{\ln(1-x)}}+\sqrt{\ln(1-x)}}{(1-x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2\ln(1-x)-1}{2(1-x)^2\sqrt{\ln(1-x)}}$$

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $2\ln(1-x)-1$ على $]-\infty,0[$

$$2\ln(1-x)-1=0 \iff \ln(1-x)=\frac{1}{2}=\ln\sqrt{e}$$
$$\iff 1-x=\sqrt{e}$$
$$\iff x=1-\sqrt{e}$$



جدول تغيرات الدالة f.

x	$-\infty$		$1-\sqrt{e}$		0
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖
$f(x)$	0	↗	$\frac{1}{\sqrt{2e}}$	↘	0

4) إنشاء المنحنى (C_f).

49 نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=\ln\left(\frac{2x}{x+1}\right)-\frac{\ln x}{x+1} \ , \ x>0 \\ f(0)=\ln 2 \end{cases}$$

1) أ- احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

ب- تحقق أن لكل x من $\mathbb{R}_+^*$ $f(x)=\frac{x\ln x}{x+1}-\ln(x+1)+\ln 2$

ج- بين أن الدالة f متصلة على اليمين في النقطة $x_0=0$.

2) أ- ادرس قابلية اشتقاق الدالة على اليمين في النقطة $x_0=0$.

ب- ادرس تغيرات الدالة f.

ج- أنشئ المنحنى (C_f) في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

(نأخذ $\ln 2\simeq 0,7$)

الجواب 1) أ- حساب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

بما أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\times\frac{x}{x+1}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{2x}{x+1}\right)=\ln 2$

فإن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ln 2$

ب- ليكن x من $\mathbb{R}_+^*$ لدينا

$$f(x)=\ln\left(\frac{2x}{x+1}\right)-\frac{\ln x}{x+1}$$
$$=\ln 2x-\ln(x+1)-\frac{\ln x}{x+1}$$
$$=\ln 2+\ln x-\ln(x+1)-\frac{\ln x}{x+1}$$
$$=\frac{(x+1)\ln x-\ln x}{x+1}-\ln(x+1)+\ln 2$$

ومنه $\forall x\in\mathbb{R}_+^* \quad f(x)=\frac{x\ln x}{x+1}-\ln(x+1)+\ln 2$

ج- لدينا $\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}}\frac{x\ln x}{x+1}-\ln(x+1)+\ln 2=\ln 2$

(لأن $\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}}\ln(x+1)=0$ و $\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}}\frac{x\ln x}{x+1}=0$)

إذن $\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)=f(0)$

ومنه f دالة متصلة على اليمين في النقطة $x_0=0$.

2) أ- قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في النقطة $x_0=0$.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}}\frac{\ln x}{x+1}-\frac{\ln(x+1)}{x}=-\infty$$

(لأن $\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$ و $\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}}\frac{\ln x}{x+1}=-\infty$)

ومنه f غير قابلة للإشتقاق على اليمين في النقطة $x_0=0$ والمنحنى (C_f) يقبل نصف مماس متجه نحو الأسفل عند النقطة $A(0,\ln 2)$.

ب- دراسة تغيرات الدالة f.

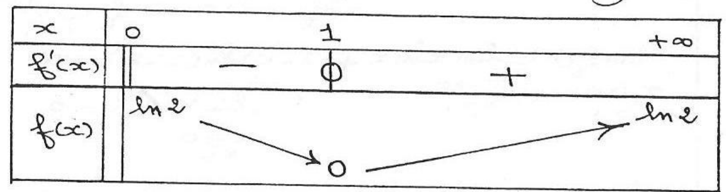
الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ ولكل x من $\mathbb{R}_+^*$ لدينا:

$$f'(x)=\frac{\left(\frac{2x}{x+1}\right)'}{\frac{2x}{x+1}}-\frac{\frac{1}{x}(x+1)-\ln x}{(x+1)^2}$$
$$=\frac{2}{(x+1)^2}\times\frac{x+1}{2x}-\frac{x+1-x\ln x}{x(x+1)^2}$$
$$=\frac{x+1-(x+1)+x\ln x}{x(x+1)^2}$$

إذن $\forall x\in\mathbb{R}_+^* \quad f'(x)=\frac{\ln x}{(x+1)^2}$

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $\ln x$ على $\mathbb{R}_+^*$.

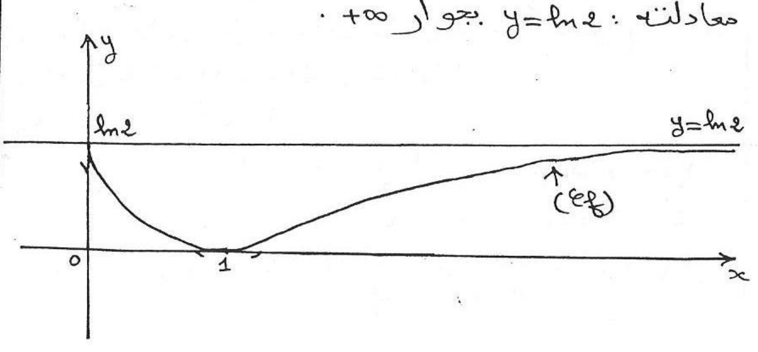
جدول تغيرات الدالة f.



x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\ln 2$	↘	0	↗	$\ln 2$

ج- إنشاء المنحنى (C_f).

بما أن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ln 2$ فإن المنحنى (C_f) يقبل مقارب أفقي معادلته: $y=\ln 2$ بجوار $+\infty$.



50

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي:

$$f(x)=x\ln x+(1-x)\ln(1-x)$$

1) أ- حدد حيز تعريف الدالة f : D_f.

ب- حدد نهايات الدالة f عند محدات D_f.

2) أدرس تغيرات الدالة f.

3) استنتج أن $\forall x\in]0,1[\quad x^x(1-x)^{1-x}\geq \frac{1}{2}$

الجواب

1) أ- تحديد D_f.

ليكن x عدداً حقيقياً لدينا

$x\in D_f \iff x>0$ و $1-x>0$

$\iff 0<x<1$

ومنه $D_f=]0,1[$

ب- نهايات f عند محدات D_f.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln x+(1-x)\ln(1-x)=0$$

(لأن $\lim_{\substack{X\to 0\\ X>0}} X\ln X=0$)

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} x\ln x+(1-x)\ln(1-x)=0$$

2) تغيرات الدالة f.

f دالة قابلة للإشتقاق على $]0,1[$ كمجموع دالتين قابلتين للإشتقاق على $]0,1[$.

ولكل x من $]0,1[$ لدينا

$f'(x)=\ln x+1-\ln(1-x)-1$

$f'(x)=\ln x-\ln(1-x)$

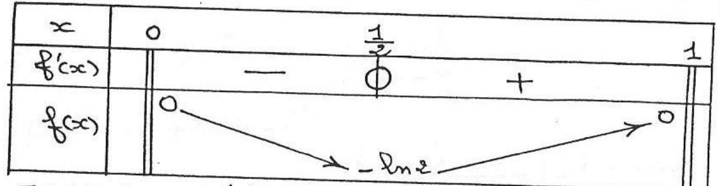
$f'(x)=0 \iff \ln(x)=\ln(1-x) \iff x=1-x$

$\iff x=\frac{1}{2}$

$f'(x)>0 \iff \ln x>\ln(1-x) \iff x>1-x \iff x>\frac{1}{2}$

$f'(x)<0 \iff \ln x<\ln(1-x) \iff x<1-x \iff x<\frac{1}{2}$

جدول تغيرات الدالة f.



x	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$-\ln 2$	↗	0

3) حسب جدول تغيرات الدالة f لدينا لكل x من $]0,1[$

$f(x)\geq f(\frac{1}{2})$

$\iff x\ln x+(1-x)\ln(1-x)\geq -\ln 2$

$\iff \ln x^x+\ln(1-x)^{1-x}\geq \ln\frac{1}{2}$

$\iff \ln\left(x^x(1-x)^{1-x}\right)\geq \ln\frac{1}{2}$

ومنه $\forall x\in]0,1[\quad x^x(1-x)^{1-x}\geq \frac{1}{2}$

51

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي:

$$f(x)=x\ln(\sqrt{x}-1)^2$$

1) حدد D_f حيز تعريف الدالة f ثم حدد نهايات f عند محدات D_f.

2) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في $x_0=0$.

3) أ- احسب $f'(x)$ لكل x من D_f.

ب- حدد إشارة $f'(x)$ على $]0,1[$.

4) نعتبر الدالة العددية g للمتغير الحقيقي t المعرفة على $]0,+\infty[$ بمايلي:

$$g(t)=\ln t^2+\frac{1}{t}+1$$

أ- اعط جدول تغيرات الدالة g وحدد إشارتها.

ب- بين أن لكل x من $]1,+\infty[$ $f'(x)=g(\sqrt{x}-1)$

ج- اعط جدول تغيرات الدالة f.

5) بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف أفصولها أكبر قطعًا من 1

6) أ- أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f).

ب- حدد معادلة ديكارتية لمماس المنحنى (C_f) عند النقطة ذات الأفصول $x_1 = 4$.

7) أنشئ المنحنى (C_f) في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

الجواب 1) تحديد D_f.

ليكن x عددًا حقيقيًا لدينا

$x \in D_f \Leftrightarrow (x \geq 0$ و $(\sqrt{x}-1)^2 > 0)$

$\Leftrightarrow (x \geq 0$ و $\sqrt{x}-1 \neq 0) \Leftrightarrow x \geq 0$ و $x \neq 1$

ومنه $D_f = [0,1[\cup]1,+\infty[$

نهايات f عند محدات D_f.

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = 0$ و $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

2) قابلية اشتقاق f على اليمين في $x_0 = 0$.

لدينا $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(\sqrt{x}-1)^2 = 0$

ومنه f قابلة للإشتقاق على اليمين في $x_0=0$ و $f'_d(0)=0$

والمنحنى (C_f) يقبل نصف مماس أفقي عند النقطة $O(0,0)$.

3) أ- حساب $f'(x)$.

f دالة قابلة للإشتقاق على $I =]0,1[\cup]1,+\infty[$

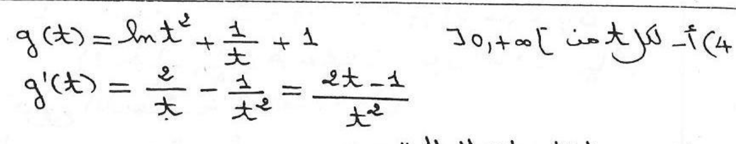
ولكل x من I $\quad f'(x) = \ln(\sqrt{x}-1)^2 + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$

ب- إشارة $f'(x)$ على $]0,1[$.

ليكن x عنصرًا من $]0,1[$ لدينا $0 < (\sqrt{x}-1)^2 < 1$

إذن $\ln(\sqrt{x}-1)^2 < 0$ و $\sqrt{x}-1 < 0$

ومنه $\forall x \in]0,1[\quad f'(x) < 0$



4) أ- لكل t من $]0,+\infty[$ $\quad g(t) = \ln t^2 + \frac{1}{t} + 1$

$g'(t) = \frac{2}{t} - \frac{1}{t^2} = \frac{2t-1}{t^2}$

ومنه جدول تغيرات الدالة g.

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\|$	$\searrow$	$3-2\ln 2$	$\nearrow$	

من خلال جدول تغيرات الدالة g نستنتج أن لكل t من $]0,+\infty[$

$g(t) \geq 3-2\ln 2 > 0$ إذن $g(t) > 0$

ب- ليكن x عنصرًا من $]1,+\infty[$ لدينا

$g(\sqrt{x}-1) = \ln(\sqrt{x}-1)^2 + \frac{1}{\sqrt{x}-1} + 1$

$= \ln(\sqrt{x}-1)^2 + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$

ومنه $\forall x \in]1,+\infty[\quad f'(x) = g(\sqrt{x}-1) > 0$

ب- جدول تغيرات الدالة f.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$-$	$\|$	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty \;\|\; -\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

5) لكل x من $]1,+\infty[$ $\quad f'(x) = g(\sqrt{x}-1)$

$f''(x) = (\sqrt{x}-1)' g'(\sqrt{x}-1) = \frac{1}{2\sqrt{x}} g'(\sqrt{x}-1)$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow g'(\sqrt{x}-1) = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}-1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{9}{4}$

بما أن الدالة f'' تنعدم في $x_0=\frac{9}{4}$ مع تغير الإشارة فإن النقطة $A\left(\frac{9}{4},-\frac{9}{2}\ln 2\right)$ نقطة انعطاف المنحنى (C_f)

6) أ- الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f).

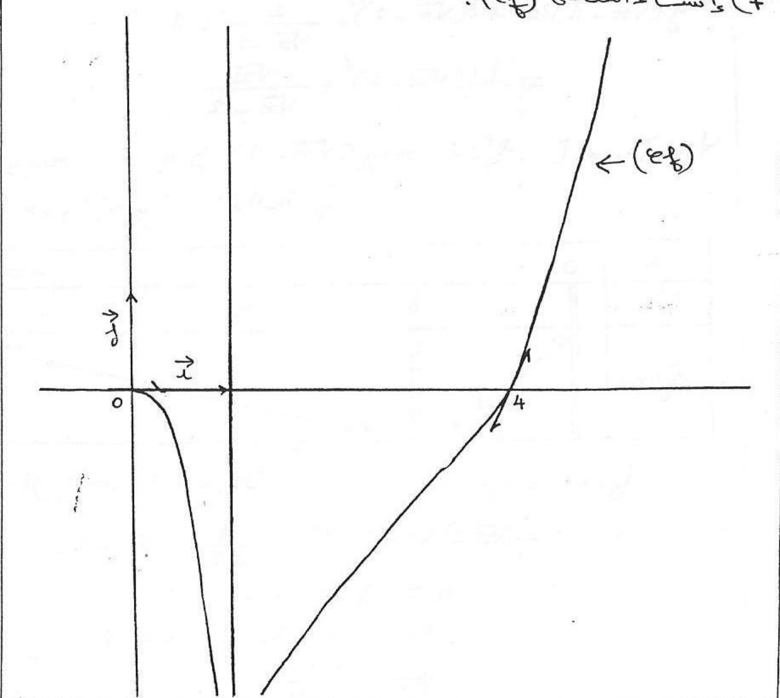
- لدينا $\lim_{x\to 1} f(x)=-\infty$ ومنه المنحنى (C_f) يقبل مقارب عمودي معادلته : $x=1$

- لدينا $\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to +\infty}\ln(\sqrt{x}-1)^2=+\infty$
ومنه المنحنى (C_f) يقبل محور الأراتيب كإتجاه مقارب بجوار $+\infty$.

ب- معادلة ديكارتية لمماس المنحنى (C_f) عند النقطة ذات الأفصول $x_1=4$ هي : $(T)\; y=f'(4)(x-4)+f(4)$

$(f'(4)=2$ و $f(4)=0)$ أي $(T)\quad y=2x-8$

7) إنشاء المنحنى (C_f).



الدالـــة الأسيــة النيبـــرية

الدالة الأسية النبيرية

- الدالة $\ln$ متصلة وتزايدية قطعاً على $]0;+\infty[$ فهي تقابل من $]0;+\infty[$ نحو $\mathbb{R}$ ودالتها العكسية تسمى الدالة الأسية النبيرية ويرمز لها بـ : $\exp$.
- $\begin{cases} \exp(x) = y \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln(y) \\ y \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}$

ونكتب $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \exp(x) = e^x$

- ليكن x و y عنصرين من $\mathbb{R}$ و r عنصراً من $\mathbb{Q}$ لدينا :

$e^x \times e^y = e^{x+y}$ ؛ $(e^x)^r = e^{rx}$

$\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$ ؛ $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$

$e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$ ؛ $e^x < e^y \Leftrightarrow x < y$

$(\forall x \in \mathbb{R}) \ \ln e^x = x$ ؛ $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \ e^{\ln x} = x$

52

اختزل التعابير التالية :

$A = e^{\frac{1}{2}\ln 3}$ ؛ $B = e^{-\ln 5}$

$C = e^{-\ln(\frac{1}{3})} \times \frac{\ln\sqrt{e}\, e^{-\ln 3}}{e^{\frac{1}{2}\ln 3}}$ ؛ $D = e^{2\ln 2 + \ln 3}$

<u>الجواب</u> - لدينا $A = e^{\frac{1}{2}\ln 3} = e^{\ln\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

لأن $((\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \ e^{\ln x} = x)$

- لدينا $B = e^{-\ln 5} = e^{\ln\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}$

- لدينا $C = e^{-\ln(\frac{1}{3})} \times \frac{\ln\sqrt{e} + e^{-\ln 3}}{e^{\frac{1}{2}\ln 3}}$

$$= e^{\ln 3} \times \frac{\frac{1}{2}\ln e - 3}{e^{\ln\sqrt{3}}} = 3 \times \frac{\frac{1}{2} - 3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \times -\frac{5}{2} = -\frac{5\sqrt{3}}{2}$$

- لدينا $D = e^{2\ln 2 + \ln 3} = e^{\ln 2^2 + \ln 3} = e^{\ln 12} = 12$

53 اختزل التعابير التالية :

$A = e^{2-\ln 3}$ $\qquad B = e^{3\ln 2 - 1}$

$C = \ln e^{-\frac{1}{4}} \times \ln(e^{-\ln(5+\ln\frac{1}{e^3})})$ $\qquad D = e^{3\ln 2 - 1} \times \ln(\frac{1}{2}e^3)$

الجواب - لدينا $A = e^{2-\ln 3} = e^2 \times e^{-\ln 3} = e^2 \times e^{\ln\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}e^2$

- لدينا $B = e^{3\ln 2 - 1} = e^{\ln 2^3 - 1} = e^{\ln 3} \times e^{-1} = 3e^{-1} = \frac{3}{e}$

- لدينا $C = \ln e^{-\frac{1}{4}} \times (e^{-\ln(5+\ln\frac{1}{e^3})})$

$$= -\frac{1}{e^4} \times e^{\ln(\frac{1}{5+\ln\frac{1}{e^3}})} = -\frac{1}{e^4} \times \frac{1}{5+\ln\frac{1}{e^3}}$$

$$= -\frac{1}{e^4} \times \frac{1}{5-\ln e^3} = -\frac{1}{e^4} \times \frac{1}{5-3} = -\frac{1}{2e^4}$$

لأن $(\forall x \in \mathbb{R} \quad \ln e^x = x)$

- لدينا $D = e^{3\ln 2 - 1} \times \ln(\frac{1}{2}e^3)$

$$= e^{\ln 8 - 1} \times (\ln\frac{1}{2} + \ln e^3)$$

$$= e^{\ln 8} \times e^{-1}(-\ln 2 + 3) = 8 . e^{-1}(3 - \ln 2)$$

$$= \frac{8}{e}(3 - \ln 2)$$

المعـــادلات

54 حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

(1) $e^x = \frac{1}{2}$ $\qquad$ (2) $e^{2x} = 25$

(3) $e^{3x} + 1 = 0$ $\qquad$ (4) $\ln(e^x - 1) = 1$

الجواب نعلم أن $\begin{cases} y = e^x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \ln y \\ y \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}$

- لنحل المعادلة (1) $e^x = \frac{1}{2}$

لدينا $e^x = \frac{1}{2} \iff x = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$

ومنه مجموعة حلول المعادلة (1) هي $S_1 = \{-\ln 2\}$

- لنحل المعادلة (2) $e^{2x} = 25$

لدينا $e^{2x} = 25 \iff 2x = \ln 25 = \ln 5^2$

$$\iff 2x = 2\ln 5 \iff x = \ln 5$$

ومنه مجموعة حلول المعادلة (2) هي $S_2 = \{\ln 5\}$

- لنحل المعادلة (3) $e^{3x} + 1 = 0$

لدينا $e^{3x} + 1 = 0 \iff e^{3x} = -1$

غير ممكن لأن لكل x من $\mathbb{R}$ $e^x > 0$

ومنه مجموعة حلول المعادلة (3) هي $S_3 = \emptyset$

- لنحل المعادلة (4) $\ln(e^x - 1) = 1$

لدينا $\ln(e^x - 1) = 1 \iff e^x - 1 = e$

$$\iff e^x = 1 + e \iff x = \ln(1+e)$$

ومنه مجموعة حلول المعادلة (4) هي $S_4 = \{\ln(1+e)\}$

55 حل المعادلات التالية :

(1) $e^{5x-1} = e^{x^2+5}$ $\qquad$ (2) $e^{3x} = 2e^{x^2}$

(3) $\frac{e^x - 3}{e^x + 1} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ (4) $\frac{e^x - e^{-x}}{2e^x + e^{-x}} = \frac{1}{3}$

الجواب - لنحل المعادلة (1) $e^{5x-1} = e^{x^2+5}$

$$\iff 5x - 1 = x^2 + 5 \iff x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\iff (x-2)(x-3) = 0 \iff x = 2 \text{ أو } x = 3$$

ومنه مجموعة حلول المعادلة (1) هي $S_1 = \{2, 3\}$

- لنحل المعادلة (2) $e^{3x} = 2e^{x^2}$

$\Leftrightarrow e^{3x} = e^{\ln 2 + x^2} \quad 3x = \ln 2 + x^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x + \ln 2 = 0$

مميز هذه المعادلة هو $\Delta = 9 - 4\ln 2 > 0$

حلول المعادلة (2) هما : $x_1 = \frac{3-\sqrt{9-4\ln 2}}{2}$ ، $x_2 = \frac{3+\sqrt{9-4\ln 2}}{2}$

ومنه مجموعة حلول المعادلة (2) هي :

$S_2 = \left\{ \frac{3-\sqrt{9-4\ln 2}}{2} , \frac{3+\sqrt{9-4\ln 2}}{2} \right\}$

- لنحل المعادلة (3) $\frac{e^x - 3}{e^x + 1} = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 2(e^x - 3) = e^x + 1 \Leftrightarrow e^x = 7$

$\Leftrightarrow x = \ln 7$

ومنه مجموعة حلول المعادلة (3) هي $S_3 = \{\ln 7\}$

- لنحل المعادلة (4) $\frac{e^x - e^{-x}}{2e^x + e^{-x}} = \frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow 3(e^x - e^{-x}) = 2e^x + e^{-x}$

$\Leftrightarrow 3\left(e^x - \frac{1}{e^x}\right) = 2e^x + \frac{1}{e^x}$

$\Leftrightarrow 3e^{2x} - 3 = 2e^{2x} + 1$

$\Leftrightarrow e^{2x} = 4 \Leftrightarrow 2x = \ln 4 = 2\ln 2$

$\Leftrightarrow x = \ln 2$

ومنه مجموعة حلول المعادلة (4) هي : $S_4 = \{\ln 2\}$

56 حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

(1) $e^{2x} + 2e^x - 3 = 0$ (2) $11e^{x+1} - 18e^{1-x} = 7e$

(3) $e^x + e^{-x} = 2$ (4) $e^{2x}(4 - e^{2x}) = 3$

الجواب

- لنحل المعادلة : (1) $e^{2x} + 2e^x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow (e^x)^2 + 2(e^x) - 3 = 0$

نضع $X = e^x$ المعادلة (1) تصبح :

$X^2 + 2X - 3 = 0$

$\Leftrightarrow X = 1$ أو $X = -3$

$\Leftrightarrow e^x = 1$ أو $e^x = -3$ غير ممكن لأن لكل x من $\mathbb{R}$ $e^x > 0$

$\Leftrightarrow x = \ln 1 = 0$

ومنه مجموعة حلول المعادلة (1) هي $S_1 = \{0\}$

- لنحل المعادلة (2) $11e^{x+1} - 18e^{1-x} = 7e$

$\Leftrightarrow 11e^x e - 18e \cdot e^{-x} = 7e$

$\Leftrightarrow 11e^x - 18 \cdot \frac{1}{e^x} = 7 \Leftrightarrow 11e^{2x} - 7e^x - 18 = 0$

$\Leftrightarrow 11(e^x)^2 - 7e^x - 18 = 0$

نضع $X = e^x$ المعادلة (2) تصبح $11X^2 - 7X - 18 = 0$

$\Leftrightarrow X = -1$ أو $X = \frac{18}{11}$

$\Leftrightarrow e^x = -1$ أو $e^x = \frac{18}{11} \Leftrightarrow x = \ln\frac{18}{11}$

غير ممكن لأن $e^x > 0$

ومنه مجموعة حلول المعادلة (2) هي $S_2 = \left\{\ln\frac{18}{11}\right\}$

- لنحل المعادلة (3) $e^x + e^{-x} = 2$

$\Leftrightarrow e^x + \frac{1}{e^x} = 2 \Leftrightarrow (e^x)^2 - 2e^x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (e^x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = \ln 1 = 0$

ومنه مجموعة حلول المعادلة (3) هي $S_3 = \{0\}$

- لنحل المعادلة (4) $e^{2x}(4 - e^{2x}) = 3$

$\Leftrightarrow (e^{2x})^2 - 4e^{2x} + 3 = 0$

$\Leftrightarrow e^{2x} = 1$ أو $e^{2x} = 3 \Leftrightarrow 2x = \ln 1 = 0$ أو $2x = \ln 3$

$\Leftrightarrow x = 0$ أو $x = \frac{1}{2}\ln 3$

ومنه مجموعة حلول المعادلة (4) هي $S_4 = \{0, \frac{1}{2}\ln 3\}$

57 حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التالية :

$$e^{\cos x-1}+e^{\frac{1}{2}-\cos x}=1+\frac{1}{\sqrt{e}} \quad (1)$$

$$\ln(2e^x-1)=2x \quad (2)$$

$$e^x-\sqrt{e^{2x-2}}-1=0 \quad (3)$$

<u>الجواب</u> - لنحل المعادلة

$$(1)\quad e^{\cos x-1}+e^{\frac{1}{2}-\cos x}=1+\frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{\cos x}}{e}+\frac{\sqrt{e}}{e^{\cos x}}=1+\frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$\Leftrightarrow (e^{\cos x})^2+e\sqrt{e}=e\left(1+\frac{1}{\sqrt{e}}\right)e^{\cos x}$$

$$\Leftrightarrow (e^{\cos x})^2-(e+\sqrt{e})e^{\cos x}+e\sqrt{e}=0$$

$$\Leftrightarrow (e^{\cos x}-e)(e^{\cos x}-\sqrt{e})=0$$

$$\Leftrightarrow e^{\cos x}-e=0 \text{ أو } e^{\cos x}-\sqrt{e}=0$$

$$\Leftrightarrow e^{\cos x}=e \text{ أو } e^{\cos x}=\sqrt{e}$$

$$\Leftrightarrow \cos x=\ln e=1 \text{ أو } \cos x=\ln\sqrt{e}=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow x=2k\pi \text{ أو } x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \text{ أو } x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi \;/ k\in\mathbb{Z}$$

ومنه مجموعة حلول المعادلة (1) هي :

$$S_1=\left\{2k\pi, \frac{\pi}{3}+2k\pi, -\frac{\pi}{3}+2k\pi \;/ k\in\mathbb{Z}\right\}$$

- لنحل المعادلة $(2)\quad \ln(2e^x-1)=2x$

$$\Leftrightarrow \ln(2e^x-1)=\ln e^{2x} \Leftrightarrow 2e^x-1=e^{2x}$$

$$\Leftrightarrow (e^x)^2-2e^x+1 \Leftrightarrow (e^x-1)^2=0$$

$$\Leftrightarrow e^x-1=0 \Leftrightarrow e^x=1 \Leftrightarrow x=\ln 1=0$$

ومنه مجموعة حلول المعادلة (2) هي $S_2=\{0\}$

- لنحل المعادلة $(3)\quad e^x-\sqrt{e^{2x-2}}-1=0$

$$\Leftrightarrow e^x-1=\sqrt{e^{2x-2}}=e^{x-1}=\frac{e^x}{e}$$

$$(3) \Leftrightarrow e.e^x-e^x=e \Leftrightarrow e^x(e-1)=e$$

$$\Leftrightarrow e^x=\frac{e}{e-1} \Leftrightarrow x=\ln\left(\frac{e}{e-1}\right)$$

ومنه مجموعة حلول المعادلة (3) هي $S_3=\left\{\ln\left(\frac{e}{e-1}\right)\right\}$

المتراجحات

58 حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية :

$$(1)\quad 2e^x-3\leq 0 \qquad (2)\quad 3-e^{-x}>0$$

$$(3)\quad \frac{e^x-1}{e^x+1}>0 \qquad (4)\quad \frac{e^x-3}{e^x-1}<0$$

<u>الجواب</u> نعلم أن $\forall(x,y)\in\mathbb{R} \quad e^x<e^y \Leftrightarrow x<y$

- لنحل المتراجحة $(1)\quad 2e^x-3\leq 0$

$$\Leftrightarrow e^x\leq\frac{3}{2} \Leftrightarrow \ln e^x\leq\ln\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow x\leq\ln\frac{3}{2}$$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة (1) هي :

$$S_1=\left]-\infty,\ln\frac{3}{2}\right]$$

- لنحل المتراجحة $(2)\quad 3-e^{-x}>0$

$$\Leftrightarrow e^{-x}<3 \Leftrightarrow -x<\ln 3$$

$$\Leftrightarrow x>-\ln 3$$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة (2) هي :

$$S_2=\left]-\ln 3,+\infty\right[$$

- لنحل المتراجحة $(3)\quad \frac{e^x-1}{e^x+1}>0$

$$\Leftrightarrow e^x-1>0 \quad \text{(لأن لكل } x \text{ من } \mathbb{R} \;\; e^x+1>0\text{)}$$

$$\Leftrightarrow e^x>1 \Leftrightarrow x>\ln 1=0$$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة (3) هي :

$$S_3=\left]0,+\infty\right[$$

- لنحل المتراجحة (4) $\frac{e^x-3}{e^x-1}<0$

x	$-\infty$	0		$\ln 3$	$+\infty$
e^x-3	$-$		$-$	0	$+$
e^x-1	$-$	0	$+$		$+$
$\frac{e^x-3}{e^x-1}$	$+$	‖	$-$	0	$+$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة (4) هي:

$S_4=]-\infty,0[\cup]\ln 3,+\infty[$

59 حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية

(1 $e^{x^2-2}\le e^{4-x}$ (2) $\ln(3e^x-5)>4$

(3 $e^{-2x}+3e^{-x}+2>0$ (4) $e^{2x+1}+15e^{-2x-1}<8$

الجواب

- لنحل المتراجحة (1) $e^{x^2-2}\le e^{4-x}$

$\Leftrightarrow x^2-2\le 4-x$

$\Leftrightarrow x^2+x-6\le 0$

$\Leftrightarrow (x+3)(x-2)\le 0 \Leftrightarrow x\in[-3,2]$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة (1) هي

$S_1=[-3,2]$

- لنحل المتراجحة (2) $\ln(3e^x-5)>4$

$\Leftrightarrow 3e^x-5>e^4$ و $3e^x-5>0$

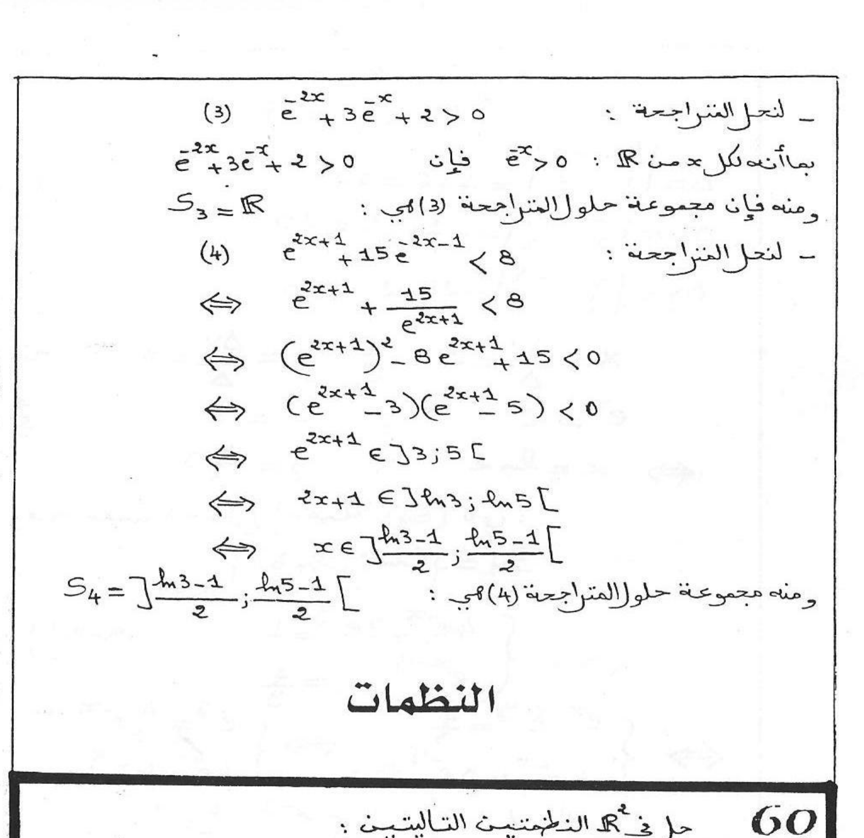
$\Leftrightarrow e^x>\frac{e^4+5}{3}$ و $e^x>\frac{5}{3}$

$\Leftrightarrow x>\ln\left(\frac{e^4+5}{3}\right)$ و $x>\ln\frac{5}{3}$

$\Leftrightarrow x>\ln\left(\frac{e^4+5}{3}\right)$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة (2) هي:

$S_2=]\ln\left(\frac{e^4+5}{3}\right),+\infty[$



- لنحل المتراجحة: (3) $e^{-2x}+3e^{-x}+2>0$

بما أنه لكل x من $\mathbb{R}$: $e^x>0$ فإن $e^{-2x}+3e^{-x}+2>0$

ومنه فإن مجموعة حلول المتراجحة (3) هي: $S_3=\mathbb{R}$

- لنحل المتراجحة: (4) $e^{2x+1}+15e^{-2x-1}<8$

$\Leftrightarrow e^{2x+1}+\frac{15}{e^{2x+1}}<8$

$\Leftrightarrow (e^{2x+1})^2-8e^{2x+1}+15<0$

$\Leftrightarrow (e^{2x+1}-3)(e^{2x+1}-5)<0$

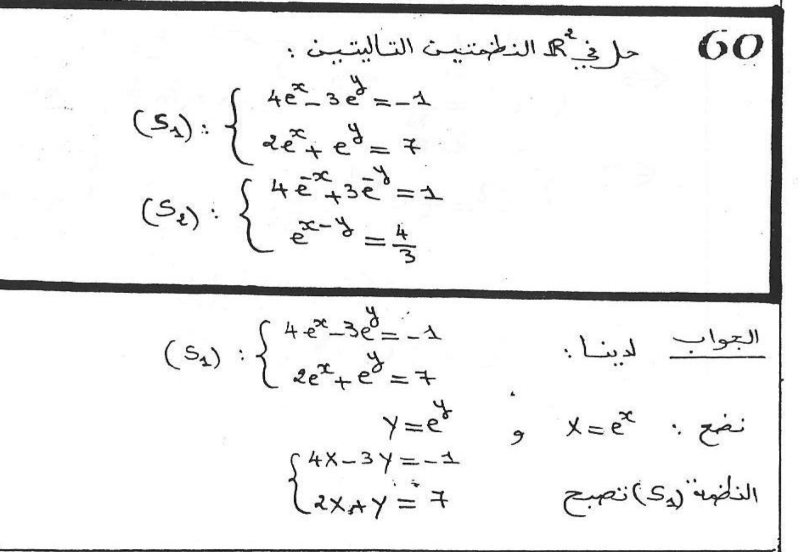
$\Leftrightarrow e^{2x+1}\in]3;5[$

$\Leftrightarrow 2x+1\in]\ln 3;\ln 5[$

$\Leftrightarrow x\in]\frac{\ln 3-1}{2};\frac{\ln 5-1}{2}[$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة (4) هي: $S_4=]\frac{\ln 3-1}{2};\frac{\ln 5-1}{2}[$

النظمات



60 حل في $\mathbb{R}^2$ النظمتين التاليتين:

$$(S_1):\begin{cases}4e^x-3e^y=-1\\2e^x+e^y=7\end{cases}$$

$$(S_2):\begin{cases}4e^{-x}+3e^{-y}=1\\e^{x-y}=\frac{4}{3}\end{cases}$$

الجواب لدينا: $(S_1):\begin{cases}4e^x-3e^y=-1\\2e^x+e^y=7\end{cases}$

نضع: $X=e^x$ و $Y=e^y$

النظمة (S_1) تصبح $\begin{cases}4X-3Y=-1\\2X+Y=7\end{cases}$

$$\begin{cases} 4X-3Y=-1 \\ 2X+Y=7 \end{cases}$$

لدينا $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4+6 = 10$

$\Delta X = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = -1+21 = 20$

$\Delta Y = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 28+2 = 30$

ومنه $X = \frac{\Delta X}{\Delta} = 2$ و $Y = \frac{\Delta Y}{\Delta} = 3$

أي $e^x = 2$ و $e^y = 3$

$\Leftrightarrow x = \ln 2$ و $y = \ln 3$

ومنه مجموعة حلول النظمة (S_1) هي :

$$S_1 = \{(\ln 2, \ln 3)\}$$

لنحل النظمة - (S_2) $\begin{cases} 4e^{-x}+3e^{-y}=1 \\ e^{x-y} = \frac{4}{3} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} e^x \cdot e^{-y} = \frac{4}{3} \\ 4e^{-x}+3e^{-y}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{-y} = \frac{4}{3}e^{-x} \\ 4e^{-x}+4e^{-x}=1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} e^{-y} = \frac{4}{3}e^{-x} \\ e^{-x} = \frac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{-y} = \frac{4}{3}e^{-x} \\ -x = \ln\frac{1}{8} = -\ln 8 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln 8 \\ e^{-y} = \frac{4}{3}e^{\ln\frac{1}{8}} = \frac{4}{3}\times\frac{1}{8} = \frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln 8 \\ y = \ln 6 \end{cases}$

ومنه مجموعة حلول النظمة (S_2) هي :

$$S_2 = \{(\ln 8, \ln 6)\}$$

61 حل في $\mathbb{R}^2$ النظمتين التاليتين :

(S_1) $\begin{cases} e^{x+y}+2 = 2e^x \\ 2-e^{y-x} = 3e^{-x} \end{cases}$ $\quad$ (S_2) : $\begin{cases} 7e^x - \ln y = 20 \\ 3e^x - 2\ln y = 7 \end{cases}$

الجواب - لنحل النظمة (S_1) $\begin{cases} e^{x+y}+2 = 2e^x \\ 2-e^{y-x} = 3e^{-x} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} e^x \cdot e^y + 2 = 2e^x \\ 2 - e^y \cdot e^{-x} = 3e^{-x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x \cdot e^y + 2 = 2e^x \\ 2e^x - e^y = 3 \end{cases}$

نضع $X = e^x > 0$ و $Y = e^y > 0$:

النظمة (S_1) تصبح $\begin{cases} XY+2 = 2X \\ 2X-Y = 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} Y = 2X-3 \\ X(2X-3)+2-2X = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y = 2X-3 \\ 2X^2-5X+2 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} X = \frac{1}{2} \text{ أو } X = 2 \\ Y = 2X-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = 2 \\ Y = 1 \end{cases}$ أو $\begin{cases} X = \frac{1}{2} \\ Y = -2 \end{cases}$ غير ممكن لأن $Y>0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} e^x = 2 \\ e^y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln 2 \\ y = \ln 1 = 0 \end{cases}$

ومنه مجموعة حلول النظمة S_1 هي $S_1 = \{(\ln 2, 0)\}$

- لنحل النظمة (S_2) : $\begin{cases} 7e^x - \ln y = 20 \\ 3e^x - 2\ln y = 7 \end{cases}$

نضع $X = e^x > 0$ و $Y = \ln y$

النظمة (S_2) تصبح $\begin{cases} 7X-Y = 20 \\ 3X-2Y = 7 \end{cases}$

لدينا $\Delta = \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -14+3 = -11$

$\Delta X = \begin{vmatrix} 20 & -1 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} = -40+7 = -33$

$\Delta Y = \begin{vmatrix} 7 & 20 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 49-60 = -11$

إذن $X = \frac{\Delta X}{\Delta} = 3$ و $Y = \frac{\Delta Y}{\Delta} = 1$

أي $e^x = 3$ و $\ln y = 1$

أي $x = \ln 3$ و $y = e$

ومنه مجموعة النظمة (S_2) هي $S_2 = \{(\ln 3, e)\}$

تحديد مجموعة التعريف

تقنية

لتكن $f(x) = e^{u(x)}$

$$D_f = D_u$$

62 حدد مجموعة تعريف الدالة f في كل من الحالات التالية :

1) $f(x) = \frac{x-1}{e^{2x}-9}$ 2) $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{x^2-1}$

3) $f(x) = \sqrt{e^x - 1}$ 4) $f(x) = 1 + \ln\left(\frac{e^x-4}{e^x+1}\right)$

الجواب ليكن x عددا حقيقيا

1) لدينا $f(x) = \frac{x-1}{e^{2x}-9}$

ولدينا $x \in D_f \Leftrightarrow e^{2x} - 9 \neq 0 \Leftrightarrow e^{2x} = 9$

$\Leftrightarrow 2x \neq \ln 9 = 2\ln 3 \Leftrightarrow x \neq \ln 3$

ومنه $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\ln 3\}$

2) لدينا $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{x^2-1}$

ولدينا $x \in D_f \Leftrightarrow x \geq 0$ و $x^2 - 1 \neq 0$

$\Leftrightarrow x \geq 0$ و $x \neq -1$ و $x \neq 1$

ومنه $D_f = [0, 1[\cup]1, +\infty[$

3) لدينا $f(x) = \sqrt{e^x - 1}$

ولدينا $x \in D_f \Leftrightarrow e^x - 1 \geq 0$

$\Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq \ln 1 = 0$

ومنه $D_f = [0, +\infty[$

4) لدينا $f(x) = 1 + \ln\left(\frac{e^x-4}{e^x+1}\right)$

ولدينا $x \in D_f \Leftrightarrow e^x + 1 \neq 0$ و $\frac{e^x-4}{e^x+1} > 0$

$\Leftrightarrow e^x - 4 > 0$ (لأن لكل x من $\mathbb{R}$ $e^x+1>0$)

$\Leftrightarrow e^x > 4 \Leftrightarrow x > \ln 2$

ومنه $D_f =]\ln 2, +\infty[$

63 حدد مجموعة تعريف الدالة f في كل من الحالات التالية :

1) $f(x) = e^{\frac{1}{\ln x}}$ 2) $f(x) = \frac{2x-4}{e^{3x+2}-1}$

3) $f(x) = e^{\frac{x+2}{x^2-4}}$ 4) $f(x) = \frac{e^{-x}}{e^x + 2e^{-x} - 3}$

الجواب ليكن x عددا حقيقيا :

1) لدينا $f(x) = e^{\frac{1}{\ln x}}$

$x \in D_f \Leftrightarrow x > 0$ و $\ln x \neq 0$

$\Leftrightarrow x > 0$ و $x \neq 1$

ومنه $D_f =]0, 1[\cup]1, +\infty[$

2) لدينا $f(x) = \frac{2x-4}{e^{3x+2}-1}$

$x \in D_f \Leftrightarrow e^{3x+2} - 1 \neq 0$

$\Leftrightarrow e^{3x+2} \neq 1 \Leftrightarrow 3x + 2 \neq \ln 1 = 0$

$\Leftrightarrow x \neq -\frac{2}{3}$

ومنه $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{2}{3}\}$

4) لدينا $f(x)=\frac{e^{-x}}{e^{x}+2e^{-x}-3}$

لدينا

$x\in D_f \Leftrightarrow e^{x}+2e^{-x}-3\neq 0$

$x\in D_f \Leftrightarrow (e^{x})^2-3e^{x}+2\neq 0$

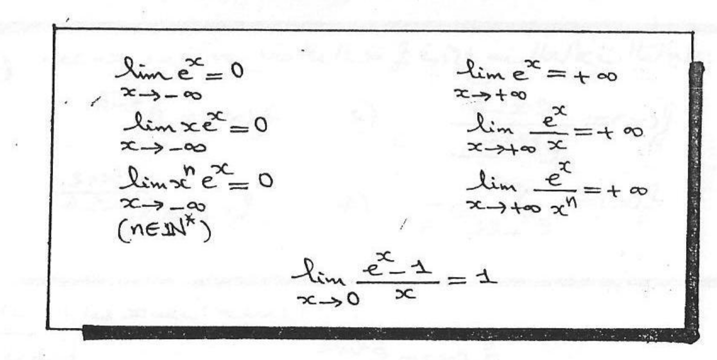
$x\in D_f \Leftrightarrow (e^{x}-1)(e^{x}-2)\neq 0$

$x\in D_f \Leftrightarrow e^{x}-1\neq 0$ و $e^{x}-2\neq 0$

$x\in D_f \Leftrightarrow x\neq 0$ و $x\neq \ln 2$

ومنه فإن $D_f=\mathbb{R}\setminus\{0;\ln 2\}$

النهايات الهامة



$\lim_{x\to+\infty} e^{x}=+\infty$, $\lim_{x\to-\infty} e^{x}=0$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x}}{x}=+\infty$, $\lim_{x\to-\infty} xe^{x}=0$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x}}{x^{n}}=+\infty$, $\lim_{x\to-\infty} x^{n}e^{x}=0$ $(n\in\mathbb{N}^*)$

$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x}-1}{x}=1$

64 حدد النهايات التالية :

1) $\lim_{x\to-\infty} x^2e^{x}$ 2) $\lim_{x\to-\infty} x^3e^{2x}$

3) $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x}}{x^2}$ 4) $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{x^3}$

ليكن n و m من $\mathbb{N}^*$ لدينا

$$x^{m}e^{nx}=\left(\frac{n}{m}xe^{\frac{n}{m}x}\right)^{m}\times\left(\frac{m}{n}\right)^{m}$$

بوضع $t=\frac{n}{m}x$ لدينا $(x\to-\infty \Leftrightarrow t\to-\infty)$

ومنه $\lim_{x\to-\infty} x^{m}e^{nx}=\lim_{t\to-\infty}(te^{t})^{m}\times\left(\frac{m}{n}\right)^{m}=0$

ولدينا

$$\boxed{\frac{e^{nx}}{x^{m}}=\left(\frac{e^{\frac{n}{m}x}}{\frac{n}{m}x}\right)^{m}\times\left(\frac{n}{m}\right)^{m}}$$

بوضع $t=\frac{n}{m}x$ لدينا $(x\to+\infty \Leftrightarrow t\to+\infty)$

ومنه $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{nx}}{x^{m}}=\left(\frac{n}{m}\right)^{m}\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{e^{t}}{t}\right)^{m}=+\infty$

<u>الجواب</u> 1) لدينا $\lim_{x\to-\infty} x^2e^{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}xe^{\frac{1}{2}x}\right)^2\cdot 2^2$

نضع $t=\frac{1}{2}x$ $(x\to-\infty \Leftrightarrow t\to-\infty)$

ومنه $\lim_{x\to-\infty} x^2e^{x}=\lim_{t\to-\infty}4(te^{t})^2=0$

2) لدينا $\lim_{x\to-\infty} x^3e^{2x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{3}xe^{\frac{2}{3}x}\right)^3\times\frac{3^3}{2^3}$

نضع $t=\frac{2}{3}x$ $(x\to-\infty \Leftrightarrow t\to-\infty)$

ومنه $\lim_{x\to-\infty} x^3e^{2x}=\lim_{t\to-\infty}(te^{t})^3\times\frac{27}{8}=0$

3) لدينا $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{\frac{1}{2}x}}{\frac{1}{2}x}\right)^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2$

نضع $t=\frac{1}{2}x$. $(x\to+\infty \Leftrightarrow t\to+\infty)$

ومنه $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x^2}=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{4}\left(\frac{e^{t}}{t}\right)=+\infty$

4) لدينا $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{\frac{2}{3}x}}{\frac{2}{3}x}\right)^3\times\left(\frac{2}{3}\right)^3$

نضع $t=\frac{2}{3}x$ $(x\to+\infty \Leftrightarrow t\to+\infty)$

ومنه $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{x^3}=\lim_{t\to+\infty}\frac{8}{27}\left(\frac{e^{t}}{t}\right)^3=+\infty$

65

حدد النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x}{\sqrt{x}}$; $x>0$

2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x e^{\frac{1}{x}}$

3) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^{x^2-2x+3}}{x}$

4) $\lim\limits_{x\to +\infty} x e^{2x-x^2}$

الجواب

1) لدينا

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{2}\sqrt{\frac{e^{2x}}{2x}}$$

نضع $t=2x$ $\quad (x\to+\infty \Leftrightarrow t\to+\infty)$

ومنه

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{\sqrt{x}} = \lim_{t\to+\infty}\sqrt{2}\sqrt{\frac{e^t}{t}} = +\infty$$

(لأن $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t}=+\infty$)

2) لدينا

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x e^{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t} = +\infty$$

بوضع $t=\frac{1}{x}$ $\quad (x\to 0^+ \Leftrightarrow t\to+\infty)$

3) لدينا

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x^2-2x+3}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x^2-2x+3}}{x^2-2x+3}\times\frac{x^2-2x+3}{x}$$

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x+3}{x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x^2-2x+3}}{x^2-2x+3}=+\infty$

فإن

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x^2-2x+3}}{x} = +\infty$$

4) لدينا

$$\lim_{x\to+\infty} x e^{2x-x^2} = \lim_{x\to+\infty}(2x-x^2)e^{2x-x^2}\times\left(\frac{x}{2x-x^2}\right)$$

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{2x-x^2}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-x^2)e^{2x-x^2}=0$

فإن

$$\lim_{x\to+\infty} x e^{2x-x^2} = 0$$

66

حدد النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{e^{bx}-1}$

2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{e^{x\ln x}-1}{x}$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{x}$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$

الجواب

1) لدينا

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{e^{bx}-1} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{ax}\times\frac{1}{\frac{e^{bx}-1}{bx}}\times\frac{ax}{bx}$$

بما أن

$$\lim_{X\to 0}\frac{e^X-1}{X}=1$$

فإن

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{e^{bx}-1} = 1\times\frac{1}{1}\times\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$$

2) لدينا

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{e^{x\ln x}-1}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x}\times\ln x = -\infty$$

3) لدينا

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{xe^x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\times\frac{2}{e^x} = 1\times 2 = 2$$

(لأن $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}=1$ و $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{e^x}=2$)

4) لدينا

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{x}\times\frac{x}{\sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\times\frac{2}{e^x}\times\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}$$

$$= 1\times 2\times\frac{1}{1}$$

$$= 2$$

67 حدد النهايات التالية :

1) $\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1}{x}$

2) $\lim_{x\to0}\frac{e^{\sin x}-1}{x^2+x}$

3) $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1-e^{x^2-5x}}{x^3-5x^2}$

4) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\sin\frac{1}{x}}$

الجواب

1) لدينا $\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2}\times x=1\times0=0$

2) لدينا $\lim_{x\to0}\frac{e^{\sin x}-1}{x^2+x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}\times\frac{\sin x}{x}\times\frac{1}{x+1}$

$=1\times1\times1=1$

3) لدينا $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1-e^{x^2-5x}}{x^3-5x^2}=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}-\left(\frac{e^{x^2-5x}-1}{x^2-5x}\right)\times\frac{1}{x}$

$=-1\times+\infty=-\infty$

4) لدينا $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\sin\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}\times\frac{\frac{1}{x}}{\sin\frac{1}{x}}$

$=\lim_{\substack{t\to0\\t>0}}\frac{e^{t}-1}{t}\times\frac{t}{\sin t}=1$ (بوضع $t=\frac{1}{x}$)

68 حدد النهايات التالية:

1) $\lim_{x\to+\infty}x(e^{\frac{1}{x}}-1)$

2) $\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{3x}$

3) $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{1-e^{-x}}$

4) $\lim_{x\to1}\frac{e^{x^2-1}-1}{\ln(x)}$

الجواب

1) لدينا $\lim_{x\to+\infty}x(e^{\frac{1}{x}}-1)=\lim_{\substack{t\to0\\x>0}}\frac{e^{t}-1}{t}=1$

بوضع $t=\frac{1}{x}$

2) لدينا $\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{3x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\times\frac{2}{3}=1\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$

3) لدينا $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{1-e^{-x}}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\times\frac{1}{\frac{e^{-x}-1}{-x}}=1\times\frac{1}{1}=1$

4) لدينا $\lim_{x\to1}\frac{e^{x^2-1}-1}{\ln(x)}=\lim_{x\to1}\frac{e^{x^2-1}-1}{x^2-1}\times\frac{1}{\frac{\ln(x)}{x-1}\times\frac{1}{x+1}}$

$=1\times\frac{1}{1\times\frac{1}{2}}=2$

69 حدد النهايات التالية :

1) $\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}-2e^{x}+3}{e^{x}+1}$

2) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}-2e^{x}+3}{e^{x}+1}$

3) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{1+x}}{1+e^{x}}$

4) $\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}$

الجواب

1) لدينا $\lim_{x\to-\infty}e^{x}=0$ و $\lim_{x\to-\infty}e^{2x}=0$

ومنه $\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}-2e^{x}+3}{e^{x}+1}=\frac{3}{1}=3$

2) لدينا $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}-2e^{x}+3}{e^{x}+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}\left(1-\frac{2}{e^{x}}+\frac{3}{e^{2x}}\right)}{e^{x}\left(1+\frac{1}{e^{x}}\right)}$

$=\lim_{x\to+\infty}e^{x}\times\frac{1-\frac{2}{e^{x}}+\frac{3}{e^{2x}}}{1+\frac{1}{e^{x}}}=+\infty$ لأن $\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x}}=0\right)$

3) لدينا $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{1+x}}{1+e^{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}.e}{1+e^{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}.e}{e^{x}(1+\frac{1}{e^{x}})}$

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e}{1+\frac{1}{e^{x}}}=e$

4) لدينا $\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{x}}{e^{x}\sqrt{1+\frac{1}{e^{2x}}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{e^{2x}}}}=2$

70

حدد النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} -x-1+e^{x}$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} (2x-1)e^{x+2}$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{e^{x}}-x$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^2+x-1)e^{x}$

الجواب

1) لدينا

$$\lim_{x\to+\infty} -x-1+e^{x}=\lim_{x\to+\infty} x\left(-1-\frac{1}{x}+\frac{e^{x}}{x}\right)$$

$$=+\infty(-1-0+\infty)=+\infty$$

2) لدينا

$$\lim_{x\to-\infty} (2x-1)e^{x+2}=\lim_{x\to-\infty} 2xe^{x}e^{2}-e^{x}\cdot e^{2}$$

$$=0$$

(لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x}=\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0$)

3) لدينا

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{e^{x}}-x=\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{x}{2}}-x$$

$$=\lim_{x\to+\infty} x\left(2\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}}-1\right)=+\infty$$

(لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}}=+\infty$)

4) لدينا

$$\lim_{x\to-\infty} (x^2+x-1)e^{x}=\lim_{x\to-\infty} x^2e^{x}+xe^{x}-e^{x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty} 4\left(\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)^2+xe^{x}-e^{x}=0$$

(لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x}=0$)

71

حدد النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{2x+1}{x-1}}$

2) $\lim\limits_{x\to1} e^{\frac{2x+1}{x-1}}$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{x}}{x^2+1}$

4) $\lim\limits_{|x|\to+\infty} \frac{e^{x}+3}{e^{x}-1}$

تقنية

$$\lim_{x\to a} u(x)=-\infty \iff \lim_{x\to a} e^{u(x)}=0$$

$$\lim_{x\to a} u(x)=+\infty \iff \lim_{x\to a} e^{u(x)}=+\infty$$

$$\lim_{x\to a} u(x)=l \iff \lim_{x\to a} e^{u(x)}=e^{l}$$

الجواب

1) لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x+1}{x-1}=2$ إذن $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{2x+1}{x-1}}=e^{2}$

2) لدينا $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} \frac{2x+1}{x-1}=-\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} \frac{2x+1}{x-1}=+\infty$

ومنه $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} e^{\frac{2x+1}{x-1}}=0$ و $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} e^{\frac{2x+1}{x-1}}=+\infty$

3) لدينا

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x}}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x}}{x^2}\times\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{4}\left(\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}}\right)^2\times\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}=+\infty$$

(لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}=0$)

4) لدينا

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x}+3}{e^{x}-1}=\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x}\left(1+\frac{3}{e^{x}}\right)}{e^{x}\left(1-\frac{1}{e^{x}}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{3}{e^{x}}}{1-\frac{1}{e^{x}}}=1$$

(لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{x}}=0$)

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{x}+3}{e^{x}-1}=-3$$

(لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0$)

72 حدد النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{x+1}{x}}$

2) $\lim\limits_{|x|\to +\infty} 1+e^{x}-e^{2x}$

3) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{x^2}{x-1}.e^{\frac{x}{x-1}}$

4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{2x}-\frac{1}{x(e^{x}+2)}$

الجواب

1) لدينا $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{x+1}{x}=-\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x+1}{x}=+\infty$

ومنه $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} e^{\frac{x+1}{x}}=0$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} e^{\frac{x+1}{x}}=+\infty$

2) لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+e^{x}-e^{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty} 1+e^{x}(1-e^{x})=-\infty$

3) لدينا $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{x^2}{x-1}e^{\frac{x}{x-1}}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} x\left(\frac{x}{x-1}e^{\frac{x}{x-1}}\right)=0$

لأن $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{x}{x-1}e^{\frac{x}{x-1}}=\lim\limits_{t\to-\infty} te^{t}=0$ (بوضع $t=\frac{x}{x-1}$)

4) لدينا $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{2x}-\frac{1}{x(e^{x}+2)}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{e^{x}+2}\right)$

$$=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{2x}\left(\frac{e^{x}}{e^{x}+2}\right)=+\infty\times\frac{1}{3}=+\infty$$

73 حدد النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(e^{2x}-e^{x}+1)-2x$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(e^{2x}-e^{x}+1)}{x}$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(e^{2x}-e^{x})$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{e^{x}-3}{e^{2x}+7}\right)+x$

الجواب 1) لدينا

$$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(e^{2x}-e^{x}+1)-2x$$

$$=\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(e^{2x}-e^{x}+1)-\ln e^{2x}$$

$$=\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{e^{2x}-e^{x}+1}{e^{2x}}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1-\frac{1}{e^{x}}+\frac{1}{e^{2x}}\right)=\ln 1=0$$

2) لدينا

$$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(e^{2x}-e^{x}+1)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(e^{2x}\left(1+\frac{1}{e^{x}}+\frac{1}{e^{2x}}\right)\right)}{x}$$

$$=\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln e^{2x}+\ln\left(1+\frac{1}{e^{x}}+\frac{1}{e^{2x}}\right)}{x}$$

$$=\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x+\ln\left(1+\frac{1}{e^{x}}+\frac{1}{e^{2x}}\right)}{x}$$

$$=\lim\limits_{x\to+\infty} 2+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{e^{x}}+\frac{1}{e^{2x}}\right)}{x}=2$$

3) لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x}-e^{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}(e^{x}-1)=+\infty$

ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(e^{2x}-e^{x})=+\infty$

4) لدينا

$$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{e^{x}-3}{e^{2x}+7}\right)+x=\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{e^{x}-3}{e^{2x}+7}\right)+\ln e^{x}$$

$$=\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{(e^{x}-3)e^{x}}{e^{2x}+7}\right)$$

$$=\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{e^{2x}\left(1-\frac{3}{e^{x}}\right)}{e^{2x}\left(1+\frac{7}{e^{2x}}\right)}\right)$$

$$=\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{1-\frac{3}{e^{x}}}{1+\frac{7}{e^{2x}}}\right)$$

$$=\ln(1)=0$$

74 حدد النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} \dfrac{e^{\frac{1}{x}+\frac{1}{\ln x}}}{x-1}$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}\ln(x)$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-2\ln(x-1)}$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}$

الجواب 1) لدينا

$$\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} \frac{e^{\frac{1}{x}+\frac{1}{\ln x}}}{x-1} = \lim_{\substack{x\to1\\x<1}} e^{\frac{1}{x}}\,\frac{e^{\frac{1}{\ln x}}}{x-1} = e\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} \frac{e^{\frac{1}{\ln x}}}{x-1} = e\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} \frac{1}{\ln x}\, e^{\frac{1}{\ln x}}\times\frac{\ln x}{x-1}$$

بما أن $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} \frac{1}{\ln x}e^{\frac{1}{\ln x}}=0$ و $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} \frac{\ln x}{x-1}=1$

فإن

$$\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} \frac{e^{\frac{1}{x}+\frac{1}{\ln x}}}{x-1}=0$$

2) لدينا

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x}\ln x = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\cdot\frac{x}{e^x} = 0\times0=0$$

3) لدينا

$$\lim_{x\to+\infty} e^{x-2\ln(x-1)} = \lim_{x\to+\infty} e^{x\left(1-\frac{2\ln(x-1)}{x-1}\times\frac{x-1}{x}\right)}$$

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x-1)}{x-1}=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x}=1$

فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1-2\frac{\ln(x-1)}{x-1}\times\frac{x-1}{x}\right)=+\infty$

ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-2\ln(x-1)}=\infty$

4) بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(1+\frac{1}{x}) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}=1$

فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}=e$

الإشتقاق

- الدالة exp قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$.

$$(\forall x\in\mathbb{R})\qquad (e^x)'=e^x$$

- إذا كانت u دالة قابلة للإشتقاق على مجال I فإن الدالة $x\mapsto e^{u(x)}$ قابلة للإشتقاق على المجال I و

$$(\forall x\in I)\qquad (e^{u(x)})'=u'(x)e^{u(x)}$$

75 حدد مشتقة الدالة f بدون تحديد مجموعة تعريفها في كل من الحالات التالية :

1) $f(x)=e^{3x+1}$

2) $f(x)=e^{3x^2-4x+5}$

3) $f(x)=e^{\frac{x-1}{2x+3}}$

4) $f(x)=e^{\cos x}$

الجواب 1) لدينا

$f(x)=e^{3x+1}$

$f'(x)=(3x+1)'e^{3x+1}$

$f'(x)=3e^{3x+1}$

2) لدينا

$f(x)=e^{3x^2-4x+5}$

$f'(x)=(6x-4)e^{3x^2-4x+5}$

3) لدينا

$f(x)=e^{\frac{x-1}{2x+3}}$

$f'(x)=\left(\frac{x-1}{2x+3}\right)'e^{\frac{x-1}{2x+3}}$

$f'(x)=\frac{5}{(2x+3)^2}e^{\frac{x-1}{2x+3}}$

4) لدينا $f(x)=e^{\cos x}$

$$f'(x)=(\cos x)'e^{\cos x}$$

$$f'(x)=-\sin x\, e^{\cos x}$$

76 حدد مشتقة الدالة f بدون تحديد مجموعة تعريفها في كل من الحالات التالية

1) $f(x)=(x^2+x+1)e^x$

2) $f(x)=\dfrac{2e^x-1}{e^x+1}$

3) $f(x)=\ln(e^{2x}-e^x+1)$

4) $f(x)=\dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

الجواب

1) لدينا $f(x)=(x^2+x+1)e^x$

ومنه
$$f'(x)=(x^2+x+1)'e^x+(x^2+x+1)(e^x)'$$
$$=(2x+1)e^x+(x^2+x+1)e^x$$
$$=(x^2+3x+2)e^x$$

2) لدينا $f(x)=\dfrac{2e^x-1}{e^x+1}$

ومنه
$$f'(x)=\frac{2e^x(e^x+1)-(2e^x-1)e^x}{(e^x+1)^2}$$
$$f'(x)=\frac{3e^x}{(e^x+1)^2}$$

3) لدينا $f(x)=\ln(e^{2x}-e^x+1)$

ومنه
$$f'(x)=\frac{2e^{2x}-e^x}{e^{2x}-e^x+1}$$

4) لدينا $f(x)=\dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

ومنه
$$f'(x)=\frac{e^x\sqrt{1-e^{2x}}-e^x\cdot\dfrac{-2e^{2x}}{2\sqrt{1-e^{2x}}}}{\left(\sqrt{1-e^{2x}}\right)^2}$$
$$=\frac{e^x(1-e^{2x})+2e^{3x}}{\left(\sqrt{1-e^{2x}}\right)}$$
$$=\frac{e^x}{\left(\sqrt{1-e^{2x}}\right)^3}$$

الدوال الأصلية

تذكير

لتكن u دالة قابلة للإشتقاق على مجال I
الدالة $x\mapsto e^{u(x)}$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto u'(x)e^{u(x)}$ على المجال I

77 حدد دالة أصلية للدالة f على I في كل من الحالات التالية:

1) $f(x)=x^2e^{x^3}$ $I=\mathbb{R}$

2) $f(x)=\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ $I=]0,+\infty[$

3) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$ $I=]-\infty,0[$

4) $f(x)=\dfrac{e^x}{(e^x+3)^2}$ $I=\mathbb{R}$

الجواب لتكن F دالة أصلية للدالة f على المجال I

1) لدينا $I=\mathbb{R}$ $\quad f(x)=x^2e^{x^3}=\frac{1}{3}(x^3)'e^{x^3}$

ومنه $\forall x\in I \quad F(x)=\frac{1}{3}e^{x^3}$

2) لدينا $I=\mathbb{R}_+^*$ $\quad f(x)=\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}=2(\sqrt{x})'e^{\sqrt{x}}$

ومنه $\forall x\in I \quad F(x)=2e^{\sqrt{x}}$

3) لدينا $I=\mathbb{R}_-^*$ $\quad f(x)=\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}=-\left(\frac{1}{x}\right)'e^{\frac{1}{x}}$

ومنه $\forall x\in I \quad F(x)=-e^{\frac{1}{x}}$

4) لدينا $I=\mathbb{R}$ $\quad f(x)=\frac{e^x}{(e^x+3)^2}=-\left(-\frac{(e^x+3)'}{(e^x+3)^2}\right)$

ومنه $\forall x\in I \quad F(x)=-\frac{1}{e^x+3}$

78

حدد دالة أصلية F للدالة f على I في كل من الحالات التالية:

1) $I=\mathbb{R} \quad f(x)=e^{2x}-x+e^{-x}+5e^{3x}$

2) $I=\mathbb{R} \quad f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$

3) $I=\mathbb{R} \quad f(x)=e^x(1+2e^x)^7$

4) $I=\mathbb{R} \quad f(x)=\sin x\, e^{\cos x}$

الجواب

1) لدينا $I=\mathbb{R}$ $\quad f(x)=e^{2x}-x+e^{-x}+5e^{3x}$

الدالة $x\mapsto\frac{1}{a}e^{ax}$ هي دالة أصلية لـ $x\mapsto e^{ax}$ على $\mathbb{R}$ حيث $a\neq 0$

ومنه $\forall x\in\mathbb{R} \quad F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{x^2}{2}-e^{-x}+\frac{5}{3}e^{3x}$

2) لدينا $I=\mathbb{R}$ $\quad f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{(e^x+1)'}{e^x+1}$

ومنه $F(x)=\ln(e^x+1)$

3) لدينا $I=\mathbb{R}$ $\quad f(x)=e^x(1+2e^x)^7$

$=\frac{1}{2}(1+2e^x)'(1+2e^x)^7$

ومنه $F(x)=\frac{1}{2}\times\frac{(1+2x)^8}{8}$

$F(x)=\frac{1}{16}(1+2x)^8$

4) لدينا $I=\mathbb{R}$ $\quad f(x)=\sin x\, e^{\cos x}=-(\cos x)'e^{\cos x}$

ومنه $F(x)=-e^{\cos x}$

79

حدد دالة أصلية F للدالة f على I في كل من الحالات التالية:

1) $I=\mathbb{R} \quad f(x)=\frac{e^x}{1+e^x}$

2) $I=\mathbb{R} \quad f(x)=\frac{e^x}{\sqrt{2e^x+1}}$

3) $I=\mathbb{R} \quad f(x)=\frac{2e^{2x}-e^{-x}}{e^{2x}+e^{-x}+1}$

4) $I=\mathbb{R}^+ \quad f(x)=\frac{e^x+x^2}{3e^x+x^3}$

الجواب

1) لدينا $I=\mathbb{R}$ $\quad f(x)=\frac{e^x}{1+e^x}=\frac{(1+e^x)'}{1+e^x}$

ومنه $F(x)=\ln(1+e^x)$

2) لدينا $I=\mathbb{R}$ $\quad f(x)=\frac{e^x}{\sqrt{2e^x+1}}=\frac{(2e^x+1)'}{2\sqrt{2e^x+1}}$

ومنه $F(x)=\sqrt{2e^x+1}$

3) لدينا $\quad I=\mathbb{R} \quad f(x)=\frac{2e^{2x}-e^{-x}}{e^{2x}+e^{-x}+1}=\frac{(e^{2x}+e^{-x}+1)'}{e^{2x}+e^{-x}+1}$

ومنه $\quad \forall x\in\mathbb{R} \quad F(x)=\ln(e^{2x}+e^{-x}+1)$

4) لدينا $\quad I=\mathbb{R} \quad f(x)=\frac{e^{x}+x^{2}}{3e^{x}+x^{3}}=\frac{1}{3}\times\frac{(3e^{x}+x^{3})'}{3e^{x}+x^{3}}$

ومنه $\quad \forall x\in\mathbb{R} \quad F(x)=\frac{1}{3}\ln(3e^{x}+x^{3})$

80

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي:

$$f(x)=\frac{1}{e^{x}+1}$$

1) بين أن $\quad \forall x\in\mathbb{R} \quad f(x)=\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$

2) استنتج دالة أصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$.

الجواب 1) ليكن x عدداً حقيقياً لدينا

$$\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}=\frac{\frac{1}{e^{x}}}{\frac{1}{e^{x}}+1}=\frac{1}{e^{x}(\frac{1}{e^{x}}+1)}=\frac{1}{1+e^{x}}$$

ومنه $\quad \forall x\in\mathbb{R} \quad f(x)=\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$

2) لدينا $\quad \forall x\in\mathbb{R} \quad f(x)=\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}=-\frac{(e^{-x}+1)'}{(e^{-x}+1)'}$

ومنه $\quad \forall x\in\mathbb{R} \quad F(x)=\ln(e^{-x}+1)$

81

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي:

$$f(x)=\frac{6-e^{x}}{3+e^{x}}$$

1) بين أن $\quad \forall x\in\mathbb{R} \quad f(x)=2-\frac{3e^{x}}{e^{x}+3}$

2) استنتج دالة أصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$.

الجواب 1) ليكن x عدداً حقيقياً لدينا

$$2-\frac{3e^{x}}{e^{x}+3}=\frac{2e^{x}+6-3e^{x}}{e^{x}+3}=\frac{6-e^{x}}{e^{x}+3}$$

ومنه $\quad \forall x\in\mathbb{R} \quad f(x)=2-\frac{3e^{x}}{e^{x}+3}$

2) لدينا $\quad \forall x\in\mathbb{R} \quad f(x)=2-\frac{3e^{x}}{e^{x}+3}=2-3\frac{(e^{x}+3)'}{e^{x}+3}$

ومنه $\quad \forall x\in\mathbb{R} \quad F(x)=2x-3\ln(e^{x}+3)$

82

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي:

$$f(x)=(2x-1)e^{x}$$

1) بين أن $\quad \forall x\in\mathbb{R} \quad f(x)=f'(x)-2x$

2) استنتج دالة أصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$.

الجواب 1) ليكن x عدداً حقيقياً لدينا

$$f(x)=(2x-1)e^{x}$$

$$f'(x)=2e^{x}+(2x-1)e^{x}=2e^{x}+f(x)$$

ومنه $\quad \forall x\in\mathbb{R} \quad f(x)=f'(x)-2$

2) لدينا $\quad \forall x\in\mathbb{R} \quad f(x)=f'(x)-2e^{x}$

ومنه $\quad F(x)=f(x)-2e^{x}$

أي $\quad F(x)=(2x-1)e^{x}-2e^{x}$

$\forall x\in\mathbb{R} \quad F(x)=(2x-3)e^{x}$

83

نعتبر الدالة f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي :

$$f(x) = (x^2+3x+2)e^{-x}$$

1) بين أن $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = -f''(x) - 2f'(x) + 2e^{-x}$

2) استنتج دالة أصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$.

3) استنتج طريقة لتحديد دالة أصلية G للدالة g المعرفة بمايلي : $g(x) = \sin(x)e^{x}$

الجواب 1) ليكن x عددا حقيقيا لدينا

$$f(x) = (x^2+3x+2)e^{-x}$$

$$f'(x) = (2x+3)e^{-x} - (x^2+3x+2)e^{-x}$$

$$= (-x^2-x+1)e^{-x}$$

$$f''(x) = (-2x-1)e^{-x} - (-x^2-x+1)e^{-x}$$

$$= (x^2-x-2)e^{-x}$$

إذن $-f''(x) - 2f'(x) + 2e^{-x} = -(x^2-x-2)e^{-x} - 2(-x^2-x+1)e^{-x} + 2e^{-x}$

$$= (-x^2+x+2+2x^2+2x-2+2)e^{-x}$$

$$= (x^2+3x+2)e^{-x}$$

ومنه $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = -f''(x) - 2f'(x) + 2e^{-x}$

2) لدينا $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = -f''(x) - 2f'(x) + 2e^{-x}$

ومنه $F(x) = -f'(x) - 2f(x) - 2e^{-x}$

$$F(x) = -(-x^2-x+1)e^{-x} - 2(x^2+3x+2)e^{-x} - 2e^{-x}$$

$$F(x) = (x^2+x-1-2x^2-6x-4-2)e^{-x}$$

وبالتالي $\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = (-x^2-5x-7)e^{-x}$

3) لدينا $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = \sin(x)e^{x}$

$$g'(x) = (\cos(x)+1)e^{x}$$

$$g''(x) = -\sin(x)e^{x} + (\cos(x)+1)e^{x}$$

$$g''(x) = -g(x) + g'(x)$$

إذن $g(x) = -g''(x) + g'(x)$

ومنه $G(x) = -g'(x) + g(x)$

$$G(x) = -(\cos(x)+1)e^{x} + \sin(x)e^{x}$$

وبالتالي $\forall x \in \mathbb{R} \quad G(x) = (\sin(x) - \cos(x)+1)e^{x}$

84

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي :

$$f(x) = \ln(\tan x)$$

1) احسب $f'(x)$ لكل x من $]0, \frac{\pi}{2}[$

2) استنتج دالة أصلية G للدالة g للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي : $g(x) = \frac{1}{\sin(2x)} \quad x \in]0, \frac{\pi}{2}[$

الجواب 1) ليكن x عددا حقيقيا من $]0, \frac{\pi}{2}[$ لدينا

$$f(x) = \ln(\tan x)$$

$$f'(x) = \frac{(\tan x)'}{\tan x} = \frac{1}{\cos^2 x} \times \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\sin x \cos x}$$

2) لدينا $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[\quad g(x) = \frac{1}{\sin(2x)}$

$$= \frac{1}{2\sin x \cos x} = \frac{1}{2} f'(x)$$

ومنه $G(x) = \frac{1}{2} f(x)$

وبالتالي $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[\quad G(x) = \frac{1}{2}\ln(\tan x)$

85 نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي:

$$f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$$

1) حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f.

2) حدد $f'(x)$ لكل x من $]1,+\infty[$

3) استنتج دالة أصلية K للدالة H المعرفة بما يلي:

$$x\in]1,+\infty[\qquad H(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

الجواب 1) ليكن x عدداً حقيقياً لدينا

$x\in D_f \Leftrightarrow x^2-1\geq 0$ و $x+\sqrt{x^2-1}>0$

$\Leftrightarrow x\in]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$ و $x+\sqrt{x^2-1}>0$

- إذا كان $x\in[1,+\infty[$ فإن $x+\sqrt{x^2-1}>0$
- إذا كان $x\in]-\infty,-1]$ فإن $0\leq x^2-1<x^2$

إذن $\sqrt{x^2-1}<|x|=-x$ أي $\sqrt{x^2-1}+x<0$

ومنه $x\notin D_f$

وبالتالي $D_f=[1,+\infty[$

2) ليكن x من $]1,+\infty[$ لدينا $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$

$$f'(x)=\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}}=\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}\,(x+\sqrt{x^2-1})}$$

ومنه $\forall x\in]1,+\infty[\quad f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

3) لدينا $\forall x\in]1,+\infty[\quad K(x)=f'(x)$

ومنه $K(x)=f(x)$

أي $\forall x\in]1,+\infty[\quad K=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$

الدالة الأسية للأساس a

الدالة $\log_a$ متصلة و رتيبة قطعاً على $\mathbb{R}_+^*$ فهي تقابل من $\mathbb{R}_+^*$ نحو $\mathbb{R}$ ودالتها العكسية تسمى الدالة الأسية للأساس a ويرمز لها بـ: $\exp_a$.

$$\begin{cases}y=\exp_a(x)=a^x\\ x\in\mathbb{R}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\log_a y\\ y\in\mathbb{R}_+^*\end{cases}$$

$$(\forall x\in\mathbb{R})\quad a^x=e^{x\ln a}$$

لكل x و y من $\mathbb{R}$ ولكل a من $\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}$ لدينا:

$$a^x\times a^y=a^{x+y}\qquad (a^x)^y=a^{xy}$$

$$\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}\qquad \frac{1}{a^x}=a^{-x}$$

المعادلات

86 حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

(1) $7^{x+\frac{4}{3}}-5^{3x}=2(7^{x+\frac{1}{3}}+5^{3x-1})$

(2) $9^x+3^x-6=0$

(3) $2^{2x-1}+3^x+4^{x+\frac{1}{2}}=9^{\frac{x}{2}+1}$

(4) $e^{x\ln 4}-3e^{x\ln 2}+2=0$

الجواب - لنحل في $\mathbb{R}$ المعادلة: (1) $7^{x+\frac{4}{3}}-5^{3x}=2(7^{x+\frac{1}{3}}+5^{3x-1})$

$\Leftrightarrow 7^{x+\frac{4}{3}}-2\times7^{x+\frac{1}{3}}=2\times5^{3x-1}+5^{3x}$

$\Leftrightarrow 7^{x+\frac{1}{3}}\times(7-2)=5^{3x-1}\times(2+5)$

(1) $\Leftrightarrow 7^{x+\frac{1}{3}} \times 5 = 5^{3x-1} \times 7$

$\Leftrightarrow \frac{7^{x+\frac{1}{3}}}{7} = \frac{5^{3x-1}}{5}$

$\Leftrightarrow 7^{x-\frac{2}{3}} = 5^{3x-2}$

$\Leftrightarrow 7^{\frac{3x-2}{3}} = 5^{3x-2}$

$\Leftrightarrow (\sqrt[3]{7})^{3x-2} = 5^{3x-2}$

$\Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt[3]{7}}{5}\right)^{3x-2} = 1$

$\Leftrightarrow 3x-2=0 \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$

ومنه مجموعة حلول المعادلة (1) هي : $S_1=\left\{\frac{2}{3}\right\}$

- لنحل المعادلة (2) $9^x+3^x-6=0$

$\Leftrightarrow (3^2)^x+3^x-6=0$

$\Leftrightarrow (3^x)^2+3^x-6=0$

نضع $X=3^x>0$ إذن المعادلة (2) تصبح

$X^2+X-6=0$

$(X-2)(X+3)=0 \Leftrightarrow X=2$ أو $X=-3$

بما أن $X>0$ فإن $X=2$ أي $3^x=2$

أي $x=\log_3(2)$

ومنه مجموعة حلول المعادلة (2) هي $S_2=\{\log_3(2)\}$

- لنحل المعادلة (3) $2^{2x-1}+3^x+4^{x+\frac{1}{2}}=9^{\frac{x}{2}+1}$

$\Leftrightarrow 2^{2x-1}+(2^2)^{x+\frac{1}{2}}=(3^2)^{\frac{x}{2}+1}-3^x$

$\Leftrightarrow 2^{2x-1}+2^{2x+1}=3^{x+2}-3^x$

$\Leftrightarrow 2^{2x}(\frac{1}{2}+2)=3^x(3^2-1)$

$\Leftrightarrow \frac{5}{2}\cdot4^x=3^x\cdot8 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^x=\frac{16}{5}$ ($2^{2x}=4^x$ لأن)

$\Leftrightarrow x=\log_{\frac{4}{3}}\left(\frac{16}{5}\right)$

ومنه مجموعة حلول المعادلة (3) هي $S_3=\left\{\log_{\frac{4}{3}}\left(\frac{16}{5}\right)\right\}$

(4) لنحل المعادلة $e^{x\ln4}-3e^{x\ln2}+2=0$

$\Leftrightarrow e^{2x\ln2}-3e^{x\ln2}+2=0$ (لأن $\ln4=2\ln2$)

$\Leftrightarrow (e^{x\ln2})^2-3(e^{x\ln2})+2=0$

$\Leftrightarrow (2^x)^2-3(2^x)+2=0$

نضع $X=2^x>0$ إذن المعادلة (4) تصبح

$X^2-3X+2=0$

$\Leftrightarrow (X-1)(X+2) \Leftrightarrow X=1$ أو $X=2$

$\Leftrightarrow 2^x=1$ أو $2^x=2$

$\Leftrightarrow x=\log_2(1)$ أو $x=\log_2(2)$

$\Leftrightarrow x=0$ أو $x=1$

ومنه مجموعة حلول المعادلة (4) هي : $S_4=\{0,1\}$

المتراجحات

$0<a<1$	$a>1$
لكل x و y من IR لدينا $a^x<a^y \Leftrightarrow x>y$	لكل x و y من IR لدينا $a^x<a^y \Leftrightarrow x<y$

87 حل في IR المتراجحات التالية :

(1) $3^x \geq 1$

(2) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-2} < 1$

(3) $2\times3^{x+1}+3^{1-x} \leq 1$

(4) $\frac{5^{-x}-1}{5^{-x}+1} > 0$

الجواب - لنحل المتراجحة (1) $3^x \geq 1$

$\Leftrightarrow 3^x \geq 3^0 \Leftrightarrow x \geq 0$ (لأن $3>1$)

ومنه مجموعة حلول المتراجحة (1) هي $S_1=[0,+\infty[$

- لنحل المتراجحة (2) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-2}<1$

$\iff \left(\frac{1}{5}\right)^{x-2}<\left(\frac{1}{5}\right)^{0}$

$\iff x-2>0$ (لأن $0<\frac{1}{5}<1$)

$\iff x>2$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة (2) هي : $S_2=]2,+\infty[$

- لنحل المتراجحة (3) $2\times 3^{x+1}+3^{1-x}\leq 1$

$\iff 6\times 3^{x}+\frac{3}{3^{x}}\leq 1$

$\iff 6(3^{x})^{2}-3^{x}+3\leq 0$

نضع $X=3^{x}>0$ المتراجحة (3) تصبح $6X^{2}-X+3\leq 0$

بما أن مميز المعادلة: $6X^{2}-X+3=0$ هو $\Delta=-71<0$

فإن لكل X من $\mathbb{R}$ $6X^{2}-X+3>0$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة (3) هي $S_3=\emptyset$

- لنحل المتراجحة: (4) $\frac{5^{-x}-1}{5^{-x}+1}>0$

$\iff 5^{-x}-1>0$ (لأن $5^{-x}+1>0$ لكل x من $\mathbb{R}$)

$\iff 5^{-x}>1=5^{0}$

$\iff -x>0$ (لأن $5>1$)

$\iff x<0$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة (4) هي :

$S_4=]-\infty,0[$

88 حدد النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)^{1-x^{2}}$

3) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\sin(x)}$

الجواب 1) لدينا

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)}}$

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$

بوضع $t=\frac{1}{x}$ $(x\to+\infty \iff t\to 0)$

فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$

2) لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)^{1-x^{2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{(1-x^{2})\ln(x+1)}$

$=0$ (لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x^{2})\ln(x+1)=-\infty$ ، $\lim\limits_{X\to-\infty}e^{X}=0$)

3) لدينا $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}=e^{1}=e$

4) لدينا $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\sin(x)}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\sin(x)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$

$=\lim e^{\frac{\sin(x)}{x}(x\ln x)-\sin(x)\ln(1+x)}=e^{0}=1$

88

1) ليكن a عددا حقيقيا.

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي :

$\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=\ln(n+e^a)$

بين أن $u_0=a$ و $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+1}=\ln(1+e^{u_n})$

2) ليكن b عددا حقيقيا سالبا قطعا.

نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة بما يلي :

$v_0=b$ و $\forall n\in\mathbb{N}\quad v_{n+1}=\ln(1-e^{v_n})$

احسب v_1 و v_2 و v_3 واستنتج أن المتتالية (v_n) تأخذ قيمتين فقط. حدد هاتين القيمتين بدلالة b.

3) نعتبر المتتالية العددية (w_n) المعرفة بمايلي :

$\forall n\in\mathbb{N}\quad w_n=u_n-\ln 2n$

بين أن المتتالية (w_n) تقبل نهاية l ينبغي تحديدها.

الجواب

1) لدينا $u_0=\ln(0+e^a)=\ln(e^a)=a$

ولدينا $u_{n+1}=\ln(n+1+e^a)$

بما أن $u_n=\ln(n+e^a)$ فإن $e^{u_n}=n+e^a$

ومنه $u_{n+1}=\ln(1+e^{u_n})$

2) لدينا $v_0=b$ و $\forall n\in\mathbb{N}\quad v_{n+1}=\ln(1-e^{v_n})$

$$v_1=\ln(1-e^{v_0})=\ln(1-e^b)$$

$$v_2=\ln(1-e^{v_1})=\ln(1-e^{\ln(1-e^b)})$$

$$=\ln(1-(1-e^b))=\ln(e^b)$$

$$v_2=b$$

لنبين أن : $\forall p\in\mathbb{N}\quad v_{2p}=b$ و $v_{2p+1}=\ln(1-e^b)$

من أجل $p=0$ لدينا $v_0=b$ و $v_1=\ln(1-e^b)$

نفترض أن $v_{2p}=b$ و $v_{2p+1}=\ln(1-e^b)$

ولنبين أن $v_{2p+2}=b$ و $v_{2p+3}=\ln(1-e^b)$

$$v_{2p+2}=\ln(1-e^{v_{2p+1}})=\ln(1-e^{\ln(1-e^b)})$$

$$=\ln(1-(1-e^b))=\ln e^b=b$$

$$v_{2p+3}=\ln(1-e^{v_{2p+2}})=\ln(1-e^b)$$

ومنه $\forall p\in\mathbb{N}\quad v_{2p}=b$ و $v_{2p+1}=\ln(1-e^b)$

3) لدينا $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad w_n=u_n-\ln 2n$

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad w_n=\ln(n+e^a)-\ln 2n$$

$$=\ln\left(\frac{n+e^a}{2n}\right)=\ln\left(\frac{1}{2}+\frac{e^a}{2n}\right)$$

بما أن $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}+\frac{e^a}{2n}=\frac{1}{2}$ فإن $\lim_{n\to+\infty}w_n=\ln\frac{1}{2}$

ومنه $\lim_{n\to+\infty}w_n=-\ln 2$

89

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بمايلي :

$n\in\mathbb{N}^*\quad u_n=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\times\cdots\times\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$

1) احسب u_1 و u_2 .

2) بين أن $\forall x\in\mathbb{R}\quad 1+x\leq e^x$

3) ادرس رتابة المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$.

4) بين أن $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad u_n<e$

5) استنتج أن (u_n) متقاربة .

الجواب

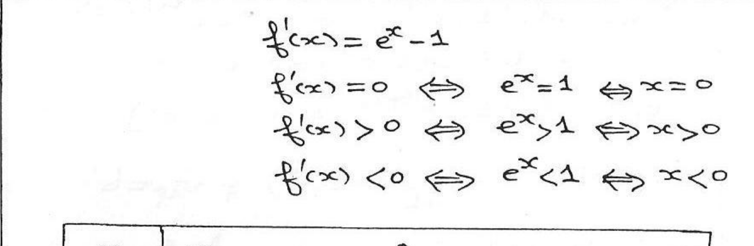
1) لدينا $u_1=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

$$u_2=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)=\frac{3}{2}\times\frac{5}{4}=\frac{15}{8}$$

2) لنبين أن $\forall x\in\mathbb{R}\quad 1+x\leq e^x$

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي المعرفة بمايلي :

$$f(x)=e^x-x-1$$

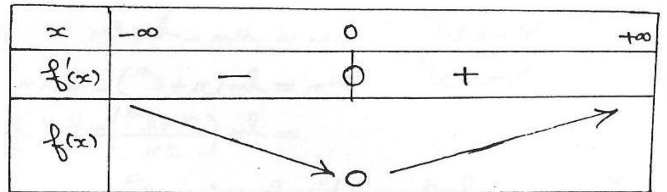


$f'(x) = e^x - 1$

$f'(x) = 0 \iff e^x = 1 \iff x = 0$

$f'(x) > 0 \iff e^x > 1 \iff x > 0$

$f'(x) < 0 \iff e^x < 1 \iff x < 0$



x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	0	↗	

من خلال جدول تغيرات الدالة f نستنتج أن لكل x من $\mathbb{R}$

$f(x) \geq 0$ أي $e^x - x - 1 \geq 0$

ومنه $\forall x \in \mathbb{R} \quad x + 1 \leq e^x$

3) رتابة المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$.

لدينا $u_{n+1} = \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\times\cdots\times\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$

إذن $u_{n+1} = \left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)u_n$

بما أن $1 < 1 + \frac{1}{2^{n+1}}$ و $u_n > 0$ لكل n من $\mathbb{N}^*$

فإن $u_n < \left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)u_n$

أي $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n < u_{n+1}$

ومنه $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية تزايدية قطعًا.

4) لدينا $\forall x \in \mathbb{R} \quad 1 + x \leq e^x$

ومنه فإن

$$\begin{cases} 1+\frac{1}{2} \leq e^{\frac{1}{2}} \\ 1+\frac{1}{2^2} \leq e^{\frac{1}{2^2}} \\ \cdots\cdots \\ 1+\frac{1}{2^n} \leq e^{\frac{1}{2^n}} \end{cases}$$

بضرب هذه المتفاوتات طرفا لطرف نحصل على

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\times\cdots\times\left(1+\frac{1}{2^n}\right) \leq e^{\frac{1}{2}}\times e^{\frac{1}{2^2}}\times\cdots\times e^{\frac{1}{2^n}}$$

أي $u_n \leq e^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}}$

لدينا $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$

$= 1 - \frac{1}{2^n} < 1$

إذن $e^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}} < e^1 = e$

وبالتالي $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n < e$

5) بما أن (u_n) تزايدية ومكبورة بالعدد e فإنها متقاربة.

90

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بمايلي :

$$\begin{cases} u_1 = 1 + \frac{1}{e} \\ u_{n+1} = u_n\left(1+\frac{1}{e^{n+1}}\right) \quad , n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

1) بين أن $\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad t - \frac{t^2}{2} < \ln(1+t) < t$

2) استنتج أن $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^{-x} - \frac{1}{2}e^{-2x} < f(x) < e^{-x}$

حيث $f(x) = \ln(1+e^{-x})$

3) بين أن $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية تزايدية.

4) بين أن $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \ln(u_n) = f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$

5) نضع $S_n = \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} + \cdots + \frac{1}{e^n}$

$H_n = \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^4} + \cdots + \frac{1}{e^{2n}}$

أ- بين أن $S_n - \frac{1}{2}H_n < \ln(u_n) < S_n$ واستنتج أن $(u_n)_{n\geq 1}$ مكبورة

ب- بين أن $\frac{2e+1}{2(e^2-1)} < \ln\left(\lim_{+\infty} u_n\right) < \frac{1}{e-1}$

الجواب 1) لنبين أن $\forall t\in\mathbb{R}_+^*\quad t-\frac{t^2}{2}<\ln(1+t)<t$

نضع $h(t)=\ln(1+t)-t$ و $g(t)=\ln(1+t)-t+\frac{t^2}{2}$

$h'(t)=\frac{1}{1+t}-1$ و $g'(t)=\frac{1}{1+t}-1+t$

$h'(t)=\frac{-t}{1+t}$ و $g'(t)=\frac{t^2}{1+t}$

إذن $\forall t\in\mathbb{R}_+\quad h'(t)\leq 0$ و $g'(t)\geq 0$

إذن . h تناقصية قطعا على $\mathbb{R}^+$ و g تزايدية قطعا على $\mathbb{R}^+$

$t>0 \Rightarrow h(t)<h(0)=0$ و $g(t)>g(0)=0$

$\Rightarrow \ln(1+t)-t<0$ و $\ln(1+t)-t+\frac{t^2}{2}<0$

$\Rightarrow \ln(1+t)<t$ و $t-\frac{t^2}{2}<\ln(1+t)$

ومنه $\forall t\in\mathbb{R}_+^*\quad t-\frac{t^2}{2}<\ln(1+t)<t$

2) لدينا $\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)=\ln(1+e^{-x})$

نضع $t=e^{-x}>0$ فحسب السؤال 1) لدينا

$$e^{-x}-\frac{(e^{-x})^2}{2}<\ln(1+e^{-x})<e^{-x}$$

أي

$$e^{-x}-\frac{e^{-2x}}{2}<f(x)<e^{-x}$$

3) لنبين أن $(u_n)_{n\geq1}$ متتالية تزايدية.

لدينا $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad u_{n+1}-u_n=u_n\left(1+\frac{1}{e^{n+1}}\right)-u_n$

$u_{n+1}-u_n=\frac{u_n}{e^{n+1}}>0$ (لأن لكل n من $\mathbb{N}^*$ $u_n>0$ و $e^{n+1}>0$)

ومنه $(u_n)_{n\geq1}$ متتالية تزايدية.

4) لدينا $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad \ln(u_{n+1})=\ln\left(u_n\left(1+\frac{1}{e^{n+1}}\right)\right)$

$\ln(u_{n+1})=\ln(u_n)+\ln\left(1+\frac{1}{e^{n+1}}\right)$

ومنه

$$\begin{cases}\ln(u_2)=\ln(u_1)+\ln\left(1+\frac{1}{e^2}\right)\\ \ln(u_3)=\ln(u_2)+\ln\left(1+\frac{1}{e^3}\right)\\ \text{-----------}\\ \ln(u_{n-1})=\ln(u_{n-2})+\ln\left(1+\frac{1}{e^{n-1}}\right)\\ \ln(u_n)=\ln(u_{n-1})+\ln\left(1+\frac{1}{e^n}\right)\end{cases}$$

بجمع هذه المتساويات طرفا بطرف وبعد الاختزال نحصل على

$\ln(u_n)=\ln(u_1)+\ln\left(1+\frac{1}{e^2}\right)+\dots+\ln\left(1+\frac{1}{e^n}\right)$

$\ln(u_n)=\ln\left(1+\frac{1}{e}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{e^2}\right)+\dots+\ln\left(1+\frac{1}{e^n}\right)$

ومنه $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad \ln(u_n)=f(1)+f(2)+\dots+f(n)$

5) أ- لدينا $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad \ln(u_n)=f(1)+f(2)+\dots+f(n)$

ولدينا $\forall x\in\mathbb{R}\quad e^{-x}-\frac{1}{2}e^{-2x}<f(x)<e^{-x}$

ومنه

$$\begin{cases}e^{-1}-\frac{1}{2}e^{-2}<f(1)<e^{-1}\\ e^{-2}-\frac{1}{2}e^{-4}<f(2)<e^{-2}\\ \text{-----------}\\ e^{-n-1}-\frac{1}{2}e^{-2(n-1)}<f(n-1)<e^{-(n-1)}\\ e^{-n}-\frac{1}{2}e^{-2n}<f(n)<e^{-n}\end{cases}$$

بجمع هذه المتساويات طرفا طرفا نحصل على:

$\left(e^{-1}+e^{-2}+\dots+e^{-n}\right)-\frac{1}{2}\left(e^{-2}+e^{-4}+\dots+e^{-2n}\right)<\ln(u_n)<e^{-1}+e^{-2}+\dots+e^{-n}$

$\left(\frac{1}{e}+\frac{1}{e^2}+\dots+\frac{1}{e^n}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^2}+\frac{1}{e^4}+\dots+\frac{1}{e^{2n}}\right)<\ln(u_n)<\frac{1}{e}+\frac{1}{e^2}+\dots+\frac{1}{e^n}$

ومنه $S-\frac{1}{2}H<\ln(u_n)<S$

لدينا $S=\frac{1}{e}+\frac{1}{e^2}+\dots+\frac{1}{e^n}=\frac{1}{e}\times\frac{1-\left(\frac{1}{e}\right)^n}{1-\frac{1}{e}}=\frac{1}{e-1}\left(1-\frac{1}{e^n}\right)$

وبما أن $1-\frac{1}{e^n}<1$ فإن $S<\frac{1}{e-1}$

ومنه $\forall n\in\mathbb{N}^* \quad \ln(u_n) < \frac{1}{e-1}$

إذن $(u_n)_{n\geq 1}$ مكبورة بالعدد $\frac{1}{e-1}$.

ب- بما أن $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية تزايدية ومكبورة فإنها متقاربة .

لدينا $S_n - \frac{H_n}{2} < \ln(u_n) < S_n$

ولدينا $H_n = \frac{1}{e^2}\times\frac{1-\left(\frac{1}{e^2}\right)^n}{1-\frac{1}{e^2}} = \frac{1-\frac{1}{e^{2n}}}{e^2-1}$

$S_n = \frac{1-\frac{1}{e^n}}{e-1}$

بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{e^n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{e^{2n}} = 0$

فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n = \frac{1}{e^2-1}$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{e-1}$

لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n - \frac{1}{2}\lim\limits_{n\to+\infty} H_n < \lim\limits_{n\to+\infty}\ln(u_n) < \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

أي $\frac{1}{e-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{e^2-1} < \ln\left(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\right) < \frac{1}{e-1}$

وبالتالي $\frac{2e+1}{2(e^2-1)} < \ln\left(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\right) < \frac{1}{e-1}$

91 نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n e^{-u_n} \end{cases}, \quad n\in\mathbb{N}$$

نضع $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

1) بين أن $\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n > 0$

2) بين أن (u_n) تناقصية .

3) بين أن (u_n) متقاربة ثم حدد $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4) بين أن $\forall n\in\mathbb{N} \quad u_{n+1} = e^{-S_n}$

5) استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

الجواب 1) لنبين بالترجع أن $\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n>0$

- من أجل $n=0$ لدينا $u_0=1$ إذن $u_0>0$

- نفترض أن $u_n>0$ ولنبين أن $u_{n+1}>0$

بما أن $u_n>0$ و $e^{-u_n}>0$ فإن $u_n e^{-u_n}>0$

أي $u_{n+1}>0$

وبالتالي $\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n>0$

2) لنبين أن (u_n) تناقصية .

ليكن n من $\mathbb{N}$ لدينا $u_{n+1}-u_n = u_n e^{-u_n} - u_n$

$= u_n(e^{-u_n}-1)$

$= \frac{u_n}{e^{u_n}}(1-e^{u_n}) < 0$ (لأن $u_n<0 \Rightarrow e^{u_n} < e^0 = 1$)

ومنه (u_n) تناقصية .

3) بما أن (u_n) تناقصية ومصغورة بالعدد 0 فإن (u_n) متقاربة

لتكن $l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ولدينا $u_{n+1} = f(u_n)$

حيث $f(x) = xe^{-x}$ و $f(]0,+\infty[) \subset]0,+\infty[$

بما أن f دالة متصلة على $]0,+\infty[$ فإن $f(l)=l$ و $l\geq 0$

لدينا $f(l)=l \Leftrightarrow le^{-l}=l \Leftrightarrow l(e^{-l}-1)=0$

$\Leftrightarrow l=0$ أو $e^{-l}=1$

$\Leftrightarrow l=0$

ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

مسائل محلولة

92 نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي :

$$f(x) = (x-1) + (x+1)e^{-x}$$

ليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أ- حدد الدالة المشتقة f' للدالة f .

ب- ادرس تغيرات الدالة f.

3) ادرس تقعر المنحنى (C_f) وبين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف I يتم تحديد إحداثيتيها.

4) ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f)

5) أ- أنشئ نقط المنحنى (C_f) ذات الأفاصيل: 0 ، 1 و -1، والمماسات للمنحنى (C_f) عند هذه النقط.

(نأخذ $e\simeq 2,7$ و $\frac{1}{e}\simeq 0,4$)

ب- أنشئ المنحنى (C_f)

الجواب 1) لدينا

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x-1)+(x+1)e^{-x} = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x-1) + \frac{x}{e^x} + e^{-x} = +\infty$$

(لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$)

2) أ- الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولكل x من $\mathbb{R}$ لدينا

$$f'(x) = 1 + e^{-x} - (x+1)e^{-x}$$

ومنه

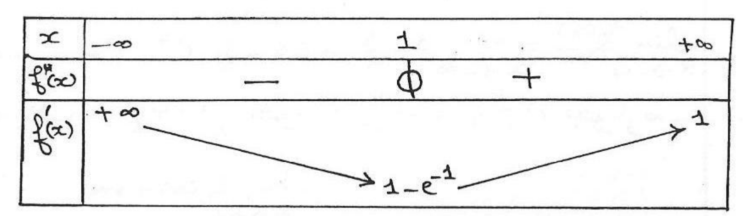
$$f'(x) = 1 - xe^{-x}$$

ب- تغيرات الدالة f

لندرس إشارة $f'(x)$.

لدينا $\forall x\in\mathbb{R} \quad f'(x) = 1 - xe^{-x}$

$$f''(x) = -e^{-x} + xe^{-x} = (x-1)e^{-x}$$



x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$+\infty$	↘	$1-e^{-1}$	↗	1

من جدول تغيرات الدالة f' نستنتج أن

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad f'(x) \geq 1-e^{-1}$$

بما أن $1-e^{-1} > 0$ فإن $\forall x\in\mathbb{R} \quad f'(x) > 0$

ومنه f تزايدية قطعاً على $\mathbb{R}$

جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

3) تقعر المنحنى (C_f) .

لدينا $\forall x\in\mathbb{R} \quad f''(x) = (x-1)e^{-x}$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
تقعر المنحنى (C_f)		$\cap$	$I(1,\frac{2}{e})$ نقطة إنعطاف	$\cup$	

بما أن الدالة f'' تنعدم مع تغيير الإشارة في $x_0=1$

فإن النقطة $I(1,\frac{2}{e})$ نقطة إنعطاف المنحنى (C_f)

4) الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f) .

لدينا $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

ولدينا $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} 1-\frac{1}{x}+(1+\frac{1}{x})e^{-x} = +\infty$

ومنه المنحنى (C_f) يقبل محور الأراتيب كإتجاه بجوار $-\infty$

لدينا $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

ولدينا $\lim_{x\to+\infty} f(x)-(x-1) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}+e^{-x}=0$

ومنه المنحنى (C_f) يقبل مقارب مائل معادلته: $y=x-1$ بجوار $+\infty$

5) أ- لدينا $f'(1)=1-\frac{1}{e}$ و $f(1)=\frac{2}{e}$ و $f'(0)=1$ و $f(0)=0$

$f(-1)=-2$ و $f'(-1)=1+e$

ب- إنشاء المنحنى (C_f) .

93 نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي :

$$f(x)=x+2+\frac{4}{e^x-1}$$

ليكن (C_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) أ- حدد مجموعة تعريف الدالة f .

ب- حدد نهايات الدالة f عند محدات D_f .

ج) بين أن الدالة f فردية .

3) ادرس تغيرات الدالة f .

4) أ- حدد الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f) .

ب- أنشئ المنحنى (C_f) .

الجواب

1) أ- تحديد D_f

ليكن x عدداً حقيقياً لدينا

$$x\in D_f \Leftrightarrow e^x-1\neq 0 \Leftrightarrow e^x\neq 1 \Leftrightarrow x\neq 0$$

ومنه $D_f=]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

ب- نهايات الدالة f عند محدات D_f .

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$\lim_{x\to0^+} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to0^-} f(x)=-\infty$

ج) لنبين أن الدالة f فردية

لدينا لكل x من D_f : $-x\in D_f$

$$f(-x)=-x+2+\frac{4}{e^{-x}-1}=-x+2+\frac{4e^x}{1-e^x}$$

$$=-x-2+4-\frac{4e^x}{e^x-1}=-x-2+\frac{4e^x-4-4e^x}{e^x-1}$$

$$=-x-2-\frac{4}{e^x-1}=-f(x)$$

ومنه f دالة فردية والمنحنى (C_f) متماثل بالنسبة لأصل المعلم O

3) تغيرات الدالة f .

لدينا f دالة قابلة للإشتقاق على D_f ولكل x من D_f لدينا

$$f'(x) = 1 - \frac{4e^x}{(e^x-1)^2} = \frac{e^{2x}-6e^x+1}{(e^x-1)^2}$$

إشارة $f'(x)$ حسب إشارة $e^{2x}-6e^x+1$ على D_f .

لدينا المعادلة $e^{2x}-6e^x+1=0$

المميز المختصر $\Delta' = 9-1=8$

ومنه $e^x = 3-2\sqrt{2}$ أو $e^x = 3+2\sqrt{2}$

أي $x=\ln(3-2\sqrt{2})$ أو $x=\ln(3+2\sqrt{2})$

جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$		$\ln(3-2\sqrt{2})$		0		$\ln(3+2\sqrt{2})$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗		↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘		↗	$+\infty$

4) أ- الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f)

- لدينا $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

ولدينا $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} 1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x(e^x-1)} = 1$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)-x = \lim_{x\to-\infty} 2+\frac{4}{e^x-1} = 2-4=-2$

ومنه المنحنى (C_f) يقبل مقارب معادلته : $y=x-2$ بجوار $-\infty$

لدينا $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

ولدينا

$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(x+2) = \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{e^x-1} = 0$

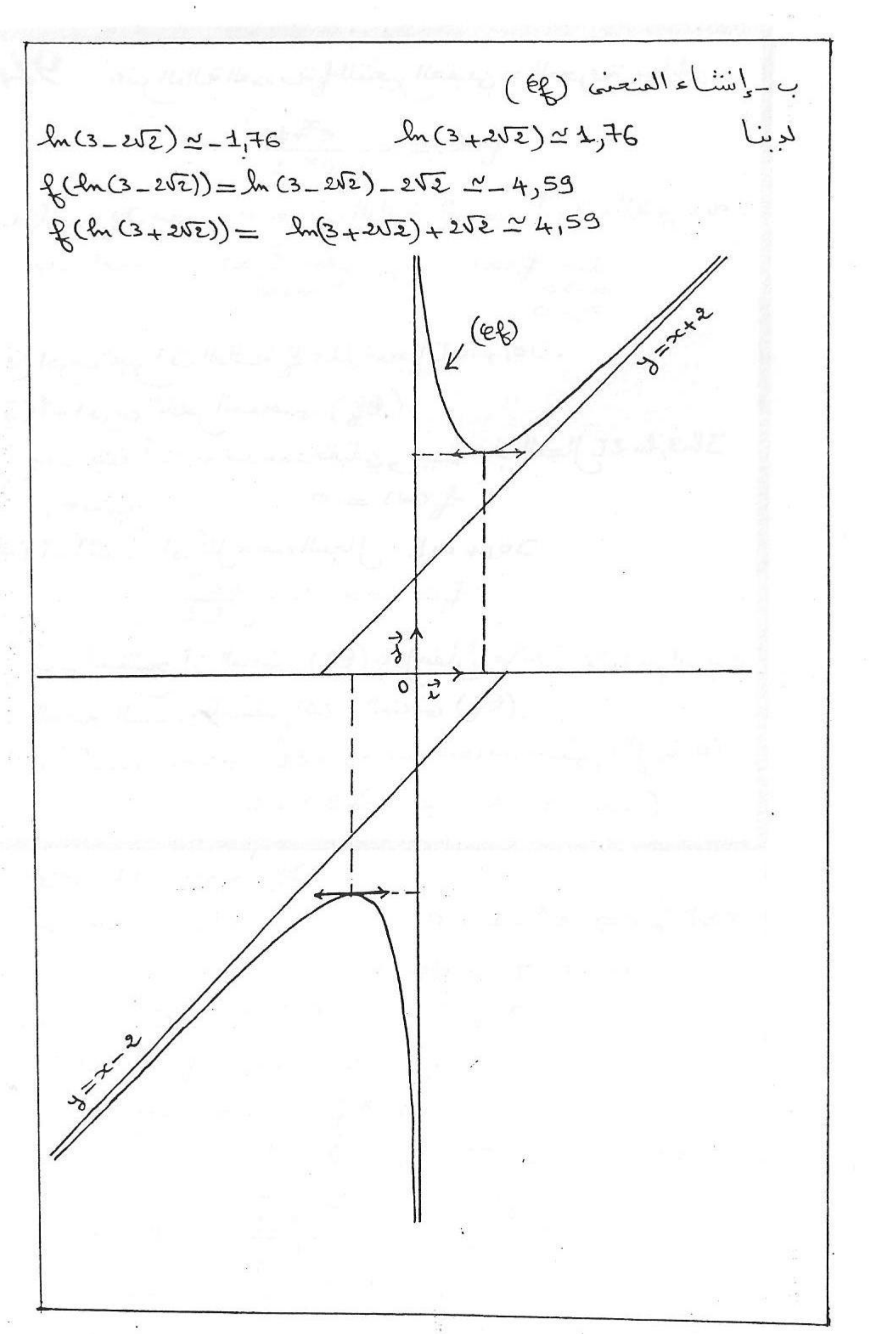
ومنه المنحنى (C_f) يقبل مقارب مائل معادلته : $y=x+2$ بجوار $+\infty$

ب- إنشاء المنحنى (C_f)

لدينا $\ln(3+2\sqrt{2}) \simeq 1{,}76$ $\quad$ $\ln(3-2\sqrt{2}) \simeq -1{,}76$

$f(\ln(3-2\sqrt{2})) = \ln(3-2\sqrt{2}) - 2\sqrt{2} \simeq -4{,}59$

$f(\ln(3+2\sqrt{2})) = \ln(3+2\sqrt{2}) + 2\sqrt{2} \simeq 4{,}59$



94

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي :

$$f(x)=x-\frac{e^x+1}{e^x-1}$$

1) أ- حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f وبين أن f دالة فردية .

ب- احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)$

2) ادرس تغيرات الدالة f على المجال $]0,+\infty[$.

3) أ- ادرس تقعر المنحنى (C_f).

ب- بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α في المجال $]\ln 3,\ln 2[$ بحيث $f(\alpha)=0$.

4) أ- أثبت أن لكل x من المجال $]0,+\infty[$

$$f(x)=x-1+\frac{2e^{-x}}{e^{-x}-1}$$

ب- استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مقاربا مائلا (Δ) ثم ادرس الوضع النسبي للمستقيم (Δ) والمنحنى (C_f).

ج- أنشئ المنحنى (C_f) في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (نأخذ : $\ln 3\simeq 1,1$ و $\ln 5\simeq 1,6$)

الجواب 1) أ- تحديد D_f .

ليكن x عددا حقيقيا لدينا $x\in D_f \Leftrightarrow e^x-1\neq 0$

$\Leftrightarrow e^x\neq 1 \Leftrightarrow x\neq 0$

ومنه $D_f=]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

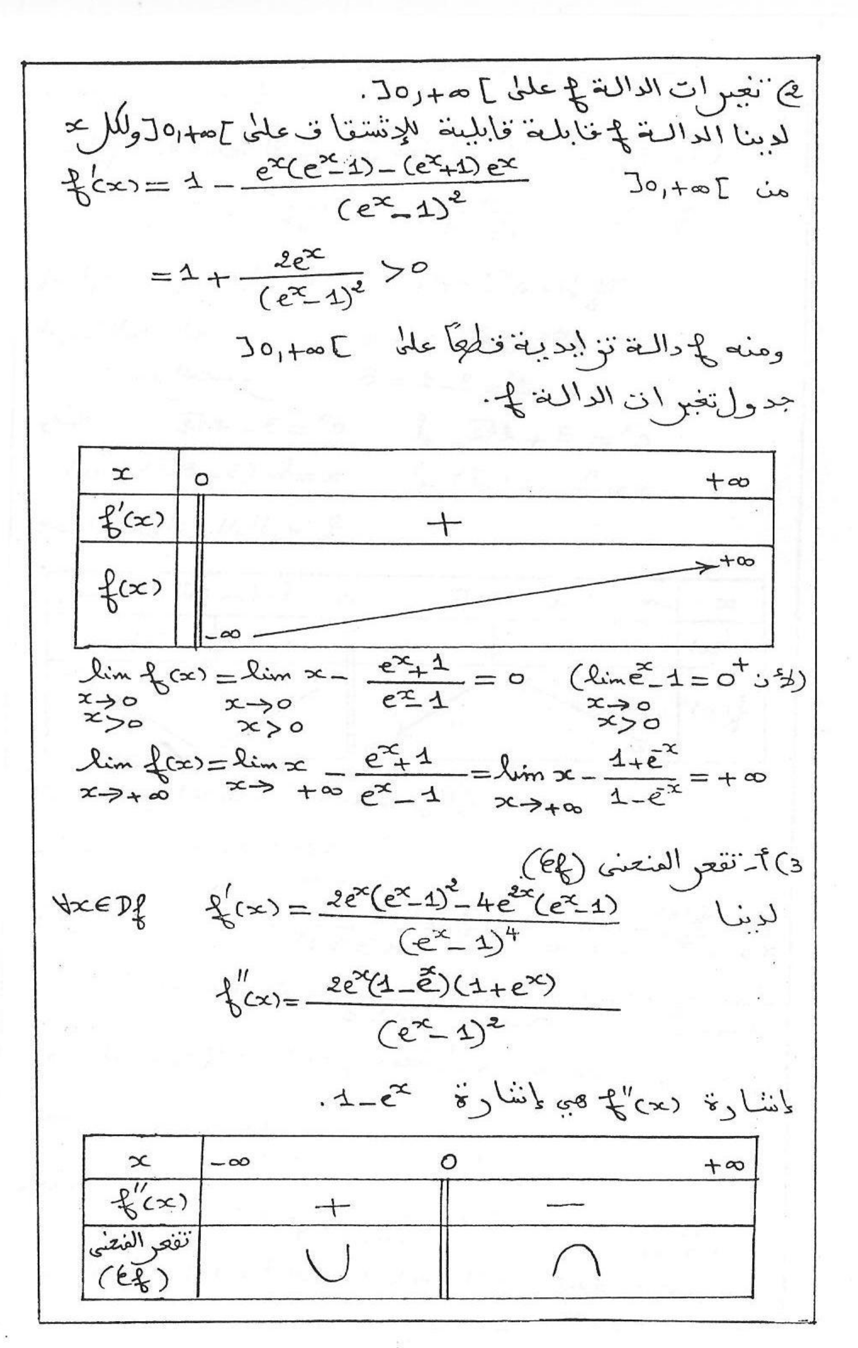
- لنبين أن f دالة فردية

لدينا لكل x من D_f : $-x\in D_f$

ولدينا $f(-x)=-x-\frac{e^{-x}+1}{e^{-x}-1}=-x-\frac{\frac{1}{e^x}+1}{\frac{1}{e^x}-1}$

$=-x-\frac{1+e^x}{1-e^x}=-x+\frac{e^x+1}{e^x-1}=-f(x)$

ومنه f دالة فردية



$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} x-\frac{e^x+1}{e^x-1}=0$ $\left(\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} e^x-1=0^+ \text{ لأن}\right)$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x-\frac{e^x+1}{e^x-1}=\lim_{x\to+\infty} x-\frac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}}=+\infty$

2) تغيرات الدالة f على $]0,+\infty[$.

لدينا الدالة f قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$ ولكل x من $]0,+\infty[$

$$f'(x)=1-\frac{e^x(e^x-1)-(e^x+1)e^x}{(e^x-1)^2}$$

$$=1+\frac{2e^x}{(e^x-1)^2}>0$$

ومنه f دالة تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$

جدول تغيرات الدالة f .

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

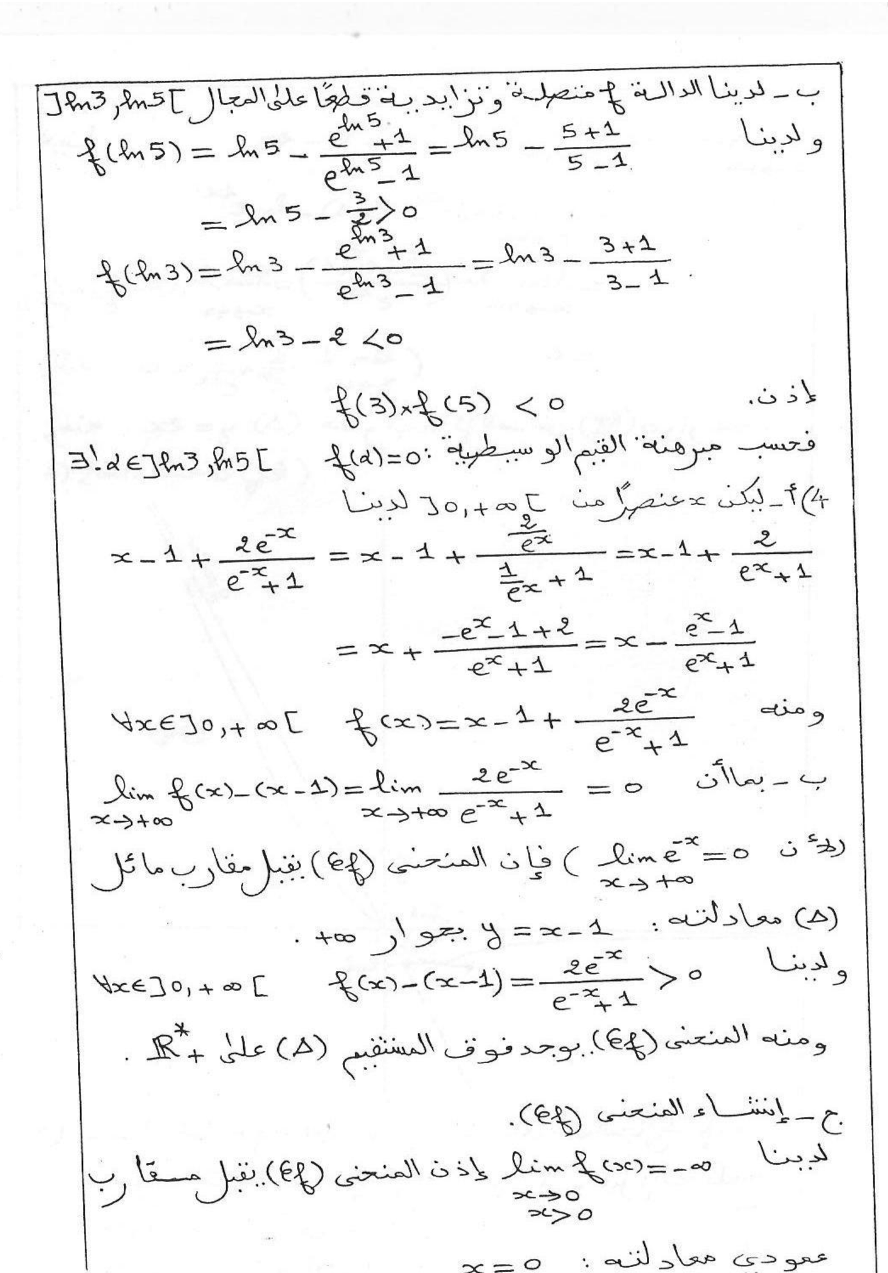
3) أ- تقعر المنحنى (C_f).

لدينا $\forall x\in D_f$ $f'(x)=\frac{2e^x(e^x-1)^2-4e^{2x}(e^x-1)}{(e^x-1)^4}$

$$f''(x)=\frac{2e^x(1-e^x)(1+e^x)}{(e^x-1)^2}$$

إشارة $f''(x)$ هي إشارة $1-e^x$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	‖	$-$
تقعر المنحنى (C_f)	$\cup$	‖	$\cap$



ب- لدينا الدالة f متصلة وتزايدية قطعا على المجال $]\ln 3, \ln 5[$

ولدينا $f(\ln 5) = \ln 5 - \frac{e^{\ln 5}+1}{e^{\ln 5}-1} = \ln 5 - \frac{5+1}{5-1}$

$= \ln 5 - \frac{3}{2} > 0$

$f(\ln 3) = \ln 3 - \frac{e^{\ln 3}+1}{e^{\ln 3}-1} = \ln 3 - \frac{3+1}{3-1}$

$= \ln 3 - 2 < 0$

إذن. $f(3)\times f(5) < 0$

فحسب مبرهنة القيم الوسيطية: $f(\alpha)=0 \quad \exists!\alpha\in]\ln 3,\ln 5[$

4) أ- ليكن x عنصرًا من $]0,+\infty[$ لدينا

$$x-1+\frac{2e^{-x}}{e^{-x}+1} = x-1+\frac{\frac{2}{e^{x}}}{\frac{1}{e^{x}}+1} = x-1+\frac{2}{e^{x}+1}$$

$$= x+\frac{-e^{x}-1+2}{e^{x}+1} = x-\frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}$$

ومنه $\forall x\in]0,+\infty[\quad f(x) = x-1+\frac{2e^{-x}}{e^{-x}+1}$

ب- بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x-1) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2e^{-x}}{e^{-x}+1} = 0$

(لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$) فإن المنحنى (C_f) يقبل مقارب مائل

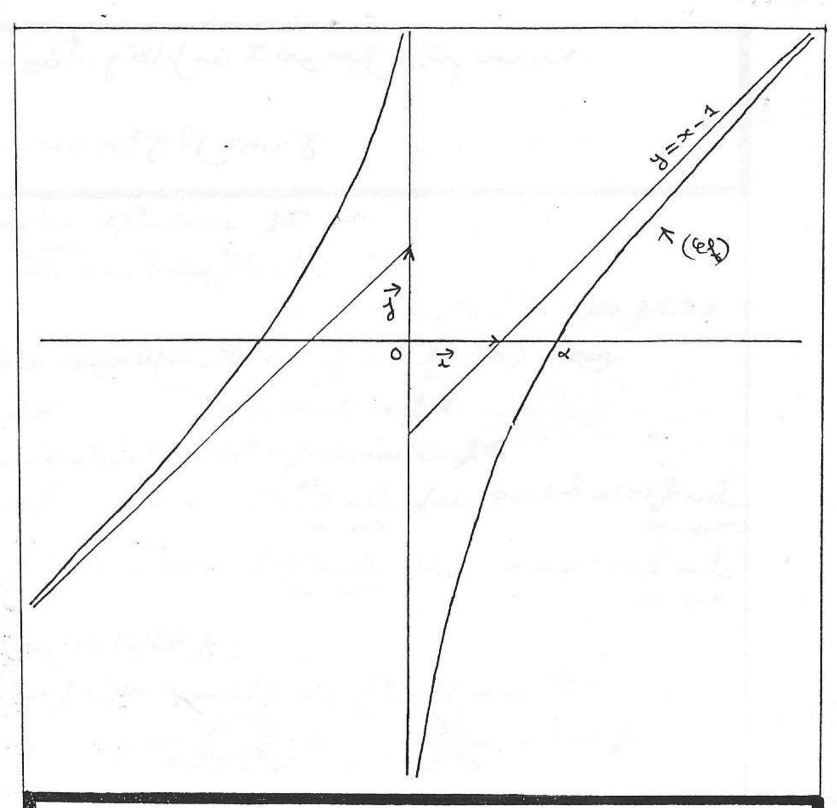
(Δ) معادلته: $y = x-1$ بجوار $+\infty$.

ولدينا $\forall x\in]0,+\infty[\quad f(x)-(x-1) = \frac{2e^{-x}}{e^{-x}+1} > 0$

ومنه المنحنى (C_f) يوجد فوق المستقيم (Δ) على $\mathbb{R}_+^*$.

ج- إنشاء المنحنى (C_f).

لدينا $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty$ إذن المنحنى (C_f) يقبل مقارب عمودي معادلته: $x=0$



95 نعتبر الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي:

$$f(x) = \ln(e^{2x} - e^{x} + 1)$$

1) أ- حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f .

ب- حدد نهايات الدالة f عند محدات D_f .

2) ادرس تغيرات الدالة f .

3) بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=2x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

4) أنشئ المنحنى (C_f) في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

5) لتكن g قصور الدالة f على المجال $I=[-\ln 2,+\infty[$

أ- بين أن g تقابل من I نحو مجال J يتم تحديده.

ب- حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من J.

الجواب 1) أ- تحديد D_f.

ليكن x عدداً حقيقياً لدينا

$$x\in D_f \Leftrightarrow e^{2x}-e^{x}+1>0$$

$$\Leftrightarrow \left(e^{x}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$$ علاقة صحيحة لكل x من $\mathbb{R}$

ومنه $D_f=]-\infty,+\infty[$

ب- تحديد نهايات الدالة f عند محدات D_f

لدينا $\lim_{x\to-\infty} e^{2x}-e^{x}+1=1$ إذن $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\ln 1=0$

لدينا $\lim_{x\to+\infty} e^{x}(e^{x}-1)+1=+\infty$ إذن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

2) تغيرات الدالة f.

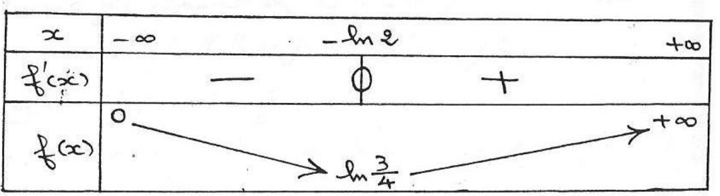
الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و لكل x من $\mathbb{R}$.

$$f'(x)=\frac{2e^{2x}-e^{x}}{e^{2x}-e^{x}+1}=\frac{e^{x}(2e^{x}-1)}{e^{2x}-e^{x}+1}$$

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $2e^{x}-1$

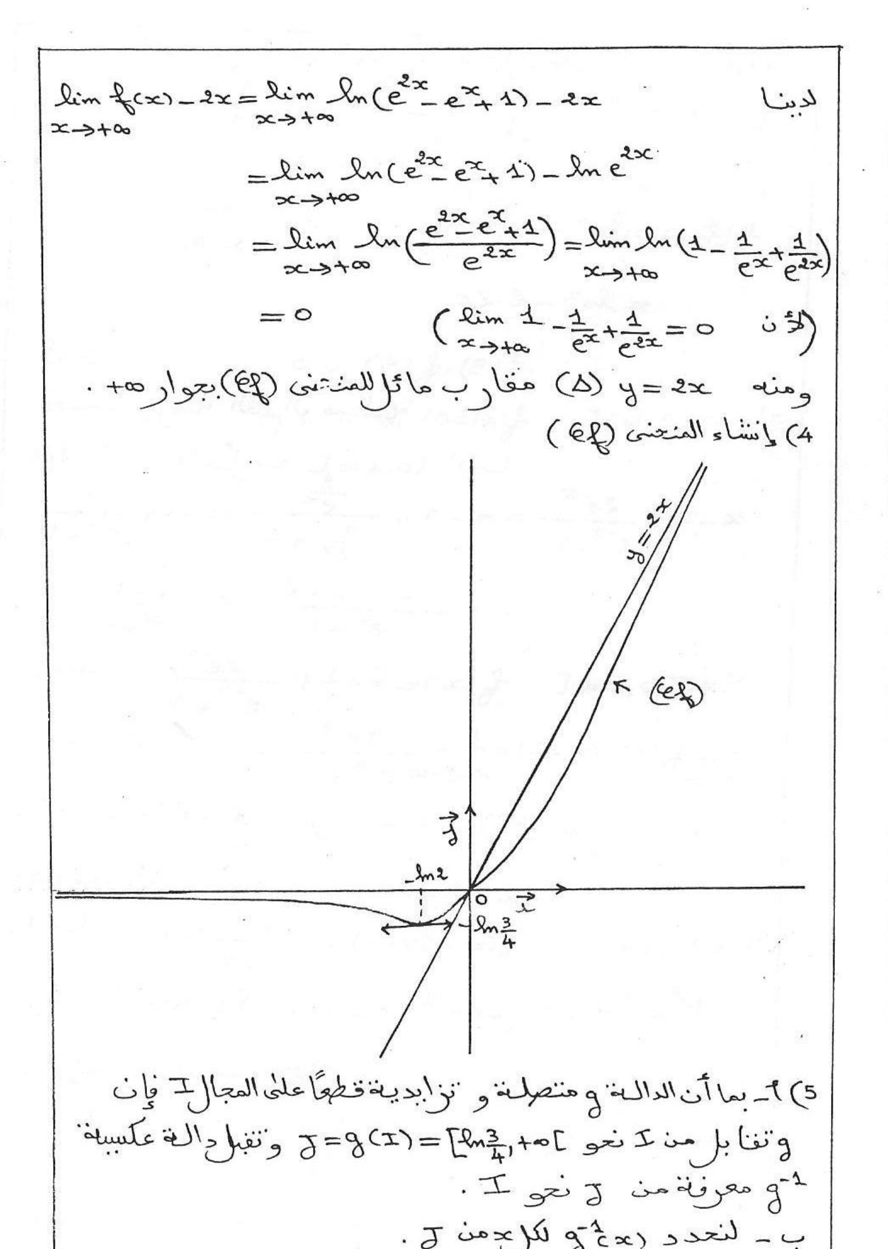
لدينا $2e^{x}-1=0 \Leftrightarrow e^{x}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\ln\frac{1}{2}=-\ln 2$

جدول تغيرات الدالة f.



x	$-\infty$	$-\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	0 ↘	$\ln\frac{3}{4}$	↗ $+\infty$

3) لنبين أن (Δ) الذي معادلته $y=2x$ مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.



لدينا $\lim_{x\to+\infty} f(x)-2x=\lim_{x\to+\infty}\ln(e^{2x}-e^{x}+1)-2x$

$$=\lim_{x\to+\infty}\ln(e^{2x}-e^{x}+1)-\ln e^{2x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{e^{2x}-e^{x}+1}{e^{2x}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1-\frac{1}{e^{x}}+\frac{1}{e^{2x}}\right)$$

$$=0 \qquad \left(\text{لأن } \lim_{x\to+\infty} 1-\frac{1}{e^{x}}+\frac{1}{e^{2x}}=0\right)$$

ومنه $y=2x$ (Δ) مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

4) إنشاء المنحنى (C_f)

5) أ- بما أن الدالة g متصلة و تزايدية قطعاً على المجال I فإن g تقابل من I نحو $J=g(I)=[\ln\frac{3}{4},+\infty[$ و تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة من J نحو I.

ب- لنحدد $g^{-1}(x)$ لكل x من J.

لدينا

$$\begin{cases} y = g^{-1}(x) \\ x \in J \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = g(y) \\ y \in I \end{cases}$$

ولدينا

$$x = g(y) \Leftrightarrow x = \ln(e^{2y} - e^{y} + 1)$$

$$\Leftrightarrow e^{x} = e^{2y} - e^{y} + 1$$

$$\Leftrightarrow e^{x} = (e^{y} - \frac{1}{2})^{2} + \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow e^{x} - \frac{3}{4} = (e^{y} - \frac{1}{2})^{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{e^{x} - \frac{3}{4}} = |e^{y} - \frac{1}{2}|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{e^{x} - \frac{3}{4}} = e^{y} - \frac{1}{2} \quad (\text{لأن لكل من } I \;\; e^{y} \geq \frac{1}{2})$$

$$\Leftrightarrow e^{y} = \sqrt{e^{x} - \frac{3}{4}} + \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow y = \ln\left(\sqrt{e^{x} - \frac{3}{4}} + \frac{1}{2}\right)$$

ومنه $\forall x \in J \quad g^{-1}(x) = \ln\left(\sqrt{e^{x} - \frac{3}{4}} + \frac{1}{2}\right)$

96

I- نعتبر الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي:

$$g(x) = e^{x} - xe^{x} - 1$$

1) احسب $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$

2) أ- احسب $g'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$.

ب- ضع جدول تغيرات الدالة g واستنتج إشارة $g(x)$.

II- نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{e^{x} - 1} - 1 \quad , \quad x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

ليكن $(\mathcal{C}_f)$ منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) بين أن الدالة f متصلة في النقطة $x_0 = 0$.

2) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = -1$ مقارب أفقي للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $+\infty$.

3) أ- احسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

ب- بين أن المستقيم (Δ') ذا المعادلة $y = -x - 1$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $-\infty$.

ج- حدد وضع المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة لمقاربه المائل

4) لتكن f' الدالة المشتقة للدالة f.

باستعمال إشارة $g(x)$ بين أن لكل x من $\mathbb{R}^{*}$ $f'(x) < 0$.

5) نقبل أن $f'(0) = -\frac{1}{2}$، ضع جدول تغيرات الدالة f

6) نقبل أن المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ ليس له أية نقطة انعطاف.

أنشئ المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ ومماسه في النقطة التي أفصولها $x_0 = 0$

(نأخذ: $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1\,cm$)

الجواب I-1) بما أن $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^{x} = 0$

فإن $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -1$

لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{x}(1 - x) - 1 = -\infty$

2) أ- الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولكل x من $\mathbb{R}$ لدينا

$$g'(x) = e^{x} - e^{x} - xe^{x} = -xe^{x}$$

ب- لدينا $\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = -xe^{x}$

إشارة $g'(x)$ هي إشارة $-x$ على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

نستنتج أن $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) \leq 0$

II- 1) لدينا $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\frac{e^{x} - 1}{x}} - 1 = 1 - 1 = 0 = f(0)$

ومنه f دالة متصلة في $x_0 = 0$.

ج) لدينا $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}-\frac{1}{x}} - 1 = -1$

(لأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$)

ومنه المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-1$ مقارب أفقي بجوار $+\infty$

3) أ_ لدينا $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^x-1} - 1 = -\infty$

ب لدينا $\lim_{x\to-\infty} f(x)-(-x-1) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^x-1}+x$

$= \lim_{x\to-\infty} \frac{xe^x}{e^x-1} = 0$ لأن $\left(\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0\right)$

ومنه المستقيم (Δ') ذا المعادلة $y=-x-1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

ج- وضع المستقيم (Δ') بالنسبة للمنحنى (C_f)

ليكن x عدداً حقيقياً من $\mathbb{R}^*$ لدينا

$$f(x)-(x-1) = \frac{xe^x}{e^x-1}$$

بما أن $\frac{x}{e^x-1} > 0$ $\quad \forall x\in\mathbb{R}^*$

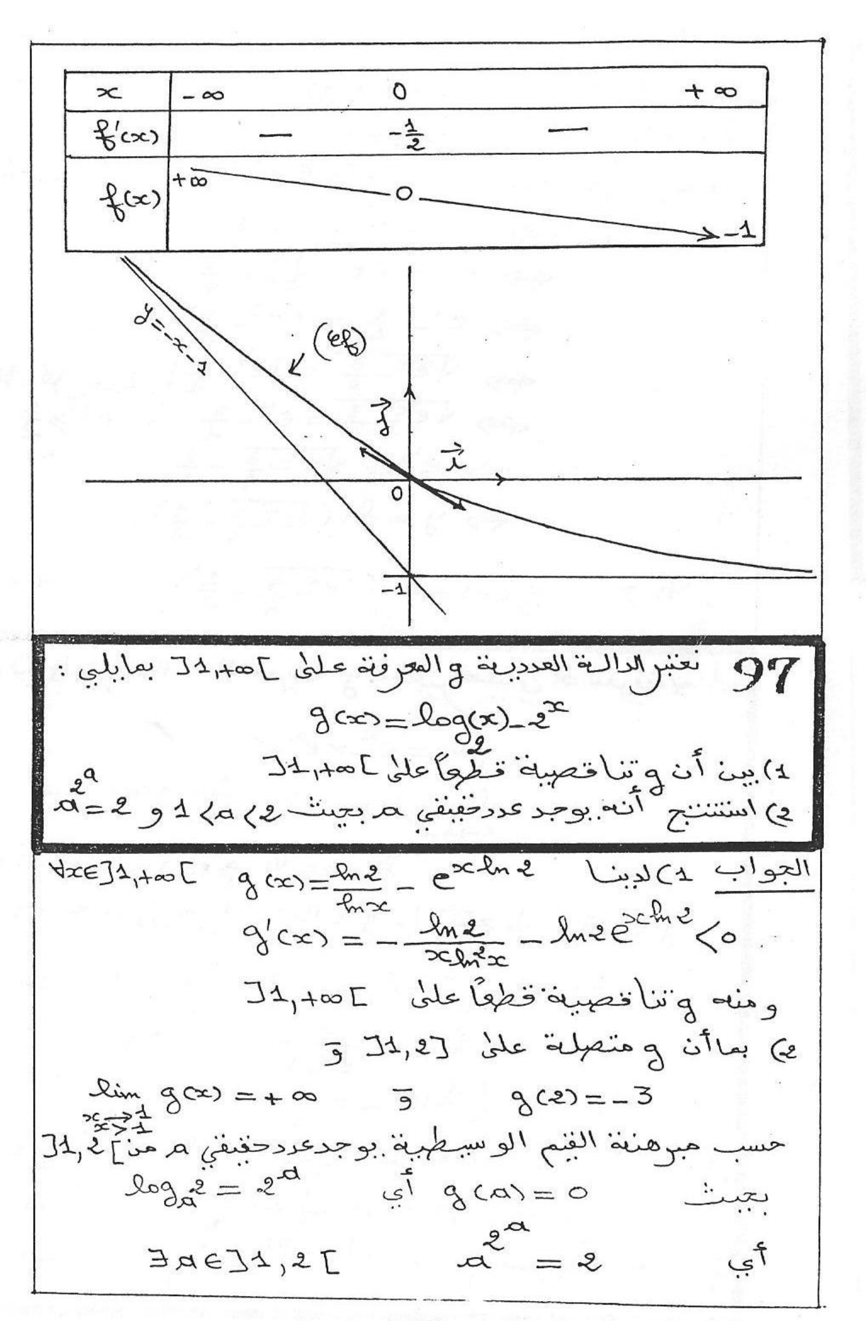
فإن $f(x)-(x-1) > 0$ $\quad \forall x\in\mathbb{R}^*$

ومنه المنحنى (C_f) يوجد فوق المستقيم (Δ').

4) لكل x من $\mathbb{R}^*$ لدينا $f'(x) = \frac{(e^x-1)-xe^x}{(e^x-1)^2}$

$$f'(x) = \frac{e^x-xe^x-1}{(e^x-1)^2} = \frac{g(x)}{(e^x-1)^2}$$

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.



x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	—	$-\frac{1}{2}$	—
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0 ↘	-1

97 نعتبر الدالة العددية g والمعرفة على $]1,+\infty[$ بمايلي :

$$g(x)=\log_2(x)-2^x$$

1) بين أن g تناقصية قطعاً على $]1,+\infty[$

2) استنتج أنه يوجد عدد حقيقي a بحيث $1<a<2$ و $a^{2^a}=2$

الجواب 1) لدينا $g(x)=\frac{\ln 2}{\ln x}-e^{x\ln 2}$ $\quad \forall x\in]1,+\infty[$

$$g'(x) = -\frac{\ln 2}{x\ln^2 x} - \ln 2\, e^{x\ln 2} < 0$$

ومنه g تناقصية قطعاً على $]1,+\infty[$

2) بما أن g متصلة على $]1,2]$ و

$g(2)=-3$ و $\lim_{x\to1, x>1} g(x)=+\infty$

حسب مبرهنة القيم الوسيطية يوجد عدد حقيقي a من $]1,2[$

بحيث $g(a)=0$ أي $\log_a 2 = 2^a$

أي $a^{2^a} = 2$ $\quad \exists a\in]1,2[$

تمارين للبحث

1

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية

1) $\ln(3x+5) = \ln(1-7x)$

2) $\ln(x^2-2x) = \ln x$

3) $\ln(x^2-3x+1) = \ln(-x^2+7x+1)$

4) $\ln(x+2)+\ln(x+3)+\ln(x-4) = 3\ln x$

5) $3\ln x = \ln(13x-12)$

6) $\ln x - \ln(x+1) = \ln(x+3) - \ln(x-4)$

7) $\ln(x^2+4) = 2\ln(-x\sqrt{5})$

8) $\ln|x^3-x^2| = \ln|x-1| + \ln(20-x)$

2

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

1) $\ln^2 x = 6 + \ln x$

2) $\ln^2|x| = 6 + \ln|x|$

3) $\ln(x+1) + \ln(x+2) = \ln(2x+8)$

4) $\ln(x+3)(x\ 2) = \ln(x+5)$

5) $\ln(x+3) + \ln(x-2) = \ln(x+5)$

6) $\ln|x+3| + \ln|x-2| = \ln|x+5|$

8) $\ln x + 1 = \dfrac{6}{\ln x}$

9) $\dfrac{\ln(3-x)}{\ln(x-1)} = 3$

3

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية :

1) $\ln(x+9) \leq 0$

2) $\ln|x+9| \leq 0$

3) $\ln(x^2 - \frac{3}{2}x) > 0$

4) $\ln|x^2 - \frac{3}{2}x| \leq 0$

5) $\ln(2x-7) \leq \ln(x+3)$

6) $2\ln(x+3) > \ln(x+1) + \ln(x+8)$

7) $2\ln(x+5) \leq \ln(x+7)$

8) $\ln(e-x) + 2\ln(x+e) \geq 3 + 2\ln 2$

4

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية :

1) $\dfrac{-1+\ln x}{3-\ln x} \geq 1$

2) $\dfrac{\ln x - 1}{\ln x + 1} < 0$

3) $\ln^2 x \leq \ln x + 2$

4) $2\ln^3 x + \ln^2 x - 5\ln x + 2 \geq 0$

5) $2\ln^2 x - \ln x - 3 \geq 0$

6) $\ln(2x+1) + \ln(x-1) < \ln 2$

7) $\ln|x+1| + \ln|x+5| > \ln 96$

8) $\ln(x^2+2x-7) \leq 3\ln(x-1)$

5

حل في $\mathbb{R}^2$ النظمات التالية :

$(S_1)\ \begin{cases} x+y=65 \\ \ln x + \ln y = \ln 1000 \end{cases}$

$(S_2)\ \begin{cases} x^2+y^2=169 \\ \ln x + \ln y = \ln 60 \end{cases}$

$(S_3)\ \begin{cases} 3\ln x - 2\ln y = 6 \\ 5\ln x + 3\ln y = 0{,}5 \end{cases}$

$(S_4)\ \begin{cases} x^2+y^2 = \frac{3}{2} \\ \ln x + \ln y = -\ln 4 \end{cases}$

$(S_5)\ \begin{cases} \ln x + \ln y = -1 \\ \ln^2 x + \ln^2 y = 5 \end{cases}$

6

حل في $\mathbb{R}^2$ النظمات التالية

$(S_1)\ \begin{cases} x+y^2=29 \\ \ln x+2\ln y=2 \end{cases}$

$(S_2)\ \begin{cases} \ln x+\ln y=1 \\ x^2+y^2=29 \end{cases}$

$(S_3)\ \begin{cases} \ln x+\ln^2 y=4 \\ \ln^2 x-3\ln xy=-5 \end{cases}$

$(S_4)\ \begin{cases} \ln x \ln \frac{x}{2y}=7 \\ \ln x-\ln y=4 \end{cases}$

7

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية.

1) $2e^{2x}-e^{x}-3=0$

2) $3e^{3x}+e^{2x}-5e^{x}+2=0$

3) $e^{x}+1=6e^{-x}$

4) $e^{2x}-e^{x+2}-e^{x+1}+e^{3}=0$

5) $e^{x}+3e^{-x}-4=0$

6) $e^{4x+1}-3e^{2x+1}-2e=0$

7) $2e^{x}+3-\frac{8}{e^{x}}+\frac{3}{e^{2x}}=0$

8

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية :

1) $e^{2x}-19+30e^{-x}\leq 0$

2) $3e^{3x}-7e^{2x}+4e^{x}>0$

3) $2e^{4x}+e^{2x}-10\geq 0$

4) $e^{(3-\ln(x^2-1))}\leq \frac{7}{x-1}$

5) $\frac{e^{x}-1}{e^{x}-2}<\frac{e^{x}+3}{e^{x}-5}$

9

حل في $\mathbb{R}^2$ النظمات التالية :

$(S_1)\ \begin{cases} e^{x+y}-e^{2y}=-2 \\ 3e^{x}-2e^{y}=-3 \end{cases}$

$(S_2)\ \begin{cases} e^{2x}+e^{2y}=25 \\ e^{x-y}+e^{y-x}=\frac{50}{7} \end{cases}$

$(S_3)\ \begin{cases} e^{x}+e^{y}=2 \\ e^{2x}+e^{2y}=25 \end{cases}$

$(S_4)\ \begin{cases} 7e^{x}-\ln y=39 \\ 2e^{x}+2\ln y=7 \end{cases}$

$(S_5)\ \begin{cases} e^{x}\cdot e^{y}=e^{3} \\ \ln x-\ln y=\ln 3-\ln 2 \end{cases}$

$(S_6)\ \begin{cases} x-y=\ln\frac{3}{2} \\ e^{2x}\cdot e^{y}=144 \end{cases}$

10

حل في $\mathbb{R}^3$ النظمة التالية :

$(S)\ \begin{cases} e^{2x}+e^{2y}+e^{2z}=21 \\ e^{y+z}+e^{z+x}+e^{x+y}=14 \\ e^{-x}+e^{-y}+e^{-z}=\frac{7}{4} \end{cases}$

11

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

1) $2\times 9^{-x}+3^{-x}-3=0$

2) $2^{x-5}=\frac{1}{5^{x-2}}$

3) $5^{2x}-4\times 5^{x}+3=0$
$2^{x-3}=3^{x-2}$

4) $3-10\times 3^{x}-8\times 9^{x}=0$

5) $3^{4x}-4\times 3^{2x}+3\times 3^{2x}=0$

6) $27^{x}-4\times 9^{x}+3\times 3^{x}=0$

12

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية :

1) $\log_2(x) = \frac{1}{2} + \log_4(x+4)$

2) $\log_5 x - \log_5(2x-1) < 0$

3) $\log_{\frac{1}{5}} x - \log_{\frac{1}{5}}(2x-1) \geq 0$

4) $\log_2 x > \log_8(3x-2)$

13

حل في $\mathbb{R}$ النظمات التالية :

$$(S_1)\begin{cases} 2^x \cdot (2^y)^2 = 64 \\ \log_2 x + 2\log_2 y = 2 \end{cases}$$

$$(S_2)\begin{cases} \log_x e + \log_y e = \frac{7}{3} \\ \ln(xy) = \frac{7}{2} \end{cases}$$

$$(S_3)\begin{cases} \log x + \log y = 1 \\ x^2 + y^2 = 29 \end{cases}$$

$$(S_4)\begin{cases} \log x \cdot \log y = 6 \\ xy = 10^5 \end{cases}$$

14

نعتبر الحدودية $P(x) = 2x^3 - 15x^2 + 6x + 7$

1) أ- احسب $P(1)$ ثم عمل $P(x)$ إلى جداء حدوديات من الدرجة الأولى .

ب- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x) = 0$.

2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلتين :

أ- $2(\ln x)^3 - 15(\ln x)^2 - 6(\ln x) + 7 = 0$

ب- $2(8)^x - 15(4)^x - 6(2)^x + 7 = 0$

15

لتكن a و b و c من $\mathbb{R}_+^*$. نعتبر الدالة f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي :

$$f(x) = \log_a x \cdot \log_b x + \log_b x \cdot \log_c x + \log_c x \cdot \log_a x$$

1) عبر عن f بدلالة $\ln$.

2) بين أن $f(x) = \dfrac{\log_a x \cdot \log_b x \cdot \log_c x}{\log_{abc} x}$

16

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية

1) $\log_a x > \log_{a^3}(3x-2)$

2) $\log_x \frac{1}{4} + \log_4\left(\frac{1}{x}\right) \leq -2$

3) $\dfrac{1 + \log_2(x+2)}{x} < \dfrac{6}{2x+1}$

4) $\log_9(x+2) - \log_3 x \leq 0$

17

بين أن :

1) $\dfrac{1}{\log_{17} 34 - \log_{34} 68} > 20$

2) $\dfrac{1}{\log_{\sqrt{2}}(\pi)} + \dfrac{1}{\log_{\sqrt{5}}(\pi)} > 1$

3) $\dfrac{1}{\log_2(\pi)} + \dfrac{1}{\log_5(\pi)} > 2$

4) $\log_2 6 > \left(\frac{5}{4}\right)^4$

5) $\log_2 7 > \left(\frac{6}{5}\right)^4$

6) $\log_{xy}(z) + \log_{yz}(x) + \log_{zx}(y) \geq \frac{3}{2}$

18

نعتبر الحدودية $P(x)=10x^3-9x^2-28x+12$

1) احسب $P(2)$ ثم حدد a و b و c بحيث لكل x من $\mathbb{R}$

$$P(x)=(x-2)(ax^2+bx+c)$$

2) أ- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x)=0$

ب- استنتج حلول المعادلة :

$$2\ln x+\ln(10x-4)=\ln(5x^2+28x-12)$$

19

بين أن $\forall(a,b)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^* \quad \ln(a+b)>e+\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)$

20

1) بين أن لكل a من $\mathbb{R}^*\setminus\{1\}$ ولكل x من $\mathbb{R}_+^*$:

$$\log_a(x)\times\log_{a^2}(x)=\frac{1}{2}(\log_a(x))^2$$

2) حل في $\mathbb{R}_+^*$ المعادلة :

$$\log_3(x)\log_3 x=2$$

21

بين أن لكل a و b من $\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}$:

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad \log_a(b)=\log_{a^n}(b^n)$$

22

بين أن لكل x من $\mathbb{R}_+^*$

$$\log_2(x)+\log_{\sqrt{2}}(x)+\log_{\frac{1}{2}}(x)=2$$

23

بين أن لكل a و b و c من $\mathbb{R}_+^*$

$$\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c a=1$$

عمم هذه العلاقة لأكثر من ثلاثة أعداد.

24

حدد النهايات التالية

1) $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}} e^{\tan x}$

2) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ x>0}} \frac{1}{x}e^{\frac{1}{\sin x}}$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}}$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^{1+x^2-x^3}}{x^3}$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}e^{-x}$

6) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ x<0}} \frac{1}{x}e^{\frac{1}{\sin x}}$

7) $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x>\frac{\pi}{2}}} \frac{1}{\cos 5x}e^{\tan x}$

8) $\lim\limits_{x\to0} \frac{e^x-\cos x}{x}$

9) $\lim\limits_{x\to0} \frac{e^{6x}-6e^x+5}{x^2}$

10) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\ln(1-3x)}{\sin x}$

25

حدد النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x-\ln(e^x-1)$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x\ln|x|$

3) $\lim\limits_{\substack{x\to\ln3\\ x<\ln3}} \ln\left(\frac{e^{2x}-9}{e^x-5}\right)$

4) $\lim\limits_{\substack{x\to\ln5\\ x>\ln5}} \ln\left(\frac{e^{2x}-9}{e^x-5}\right)$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{e^{2x}-9}{e^x-5}\right)-x$

6) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ x>0}} x-3\ln x$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x+3)-\ln(x-5)$

8) $\lim\limits_{\substack{x\to2\\ x>2}} \ln(x^2-x-2)-\ln(x^2+5x-14)$

9) $\lim\limits_{x\to3} \frac{x-3}{\ln(x-2)}$

10) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2}$

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x}e^{1-x^2}$

12) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^5e^{1-x^2}$

13) $\lim\limits_{x\to0} \frac{e^{\sin x}-1}{x}$

14) $\lim\limits_{x\to0} \frac{e^x-e^{3x}}{\sin x}$

26 ليكن $\log_{40} 100 = a$ احسب $\log_{16} 25$ بدلالة a .

27 حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

1) $e^{4x+2} - \frac{e^2}{e^{4x+2}} = e^2 - 1$

2) $2^{3x+1} = 8^{5x-3}$

3) $3^{4x} = 9^{\frac{8x-5}{8x-8}}$

4) $4e^{-5x} + 3e^{-3x} - e^{-x} = 0$

5) $e^{\ln(1-x^2)} = -2x+1$

6) $(x^2-1)e^{\ln(x-2)} = \ln e^{x+1}$

7) $2^x + \frac{6}{2^x} = 5$

8) $5^{\sin x} + \frac{2}{5^{\sin x}} = 3$

28 I- نعتبر الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي :

$$g(x) = x - \ln x$$

1) حدد D_g حيز تعريف الدالة g و احسب نهايات g عند محدات D_g

2) احسب $g'(x)$ واعط جدول تغيرات الدالة g .

3) استنتج أن $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad x > \ln x$

II- لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x+\ln x}{x-\ln x} & x \quad 0 \\ f(0) = -1 \end{cases}$$

وليكن (C_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) بين أن مجموعة تعريف الدالة f هي : $D_f = [0,+\infty[$

2) أ- بين أن f متصلة في الصفر على اليمين .

ب- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

3) أ- بين أن f قابلية للإشتقاق في الصفر على اليمين .

ب- بين أن لكل x من $D_f - \{0\}$: $f'(x) = \frac{2(1-\ln x)}{(x-\ln x)^2}$

واعط جدول تغيرات الدالة f .

4) أ- حدد تقاطع المنحنى (C_f) والمستقيم $(\Delta) : y = 1$

ب- بين أن المنحنى (C_f) يقطع محور الأفاصيل في نقطة أفصولها ينتمي إلى $]\frac{1}{2}, 1[$.

ج- أنشئ المنحنى (C_f) (نأخذ $e \simeq 2,7$ و $\ln 2 \simeq 0,7$)

29 نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $D =]0,1[\cup]1,+\infty[$ بمايلي : $f(x) = \frac{1}{\ln x} + \ln|\ln x|$

ليكن (C_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) أ- احسب النهايات التالية :

$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ب- احسب النهاية : $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x>1}} f(x)$ (يمكن وضع $t = \ln x$)

2) أ- بين أن لكل x من D : $f'(x) = \frac{-1+\ln x}{x(\ln x)^2}$

ب- إشارة $f'(x)$ على D ثم اعط جدول تغيرات الدالة f .

3) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ ثم أول هندسيا النتيجة المحصلة .

4) أ- بين أن لكل x من D : $f''(x) = \frac{(\ln x)(2-(\ln x)^2)}{x^2(\ln x)^4}$

ب- استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل نقطتي انعطاف ينبغي تحديد أفصوليهما

5) أنشئ المنحنى (C_f) .

(نأخذ $e \simeq 2,7$ و $e^{\sqrt{2}} \simeq 4$ و $e^{-\sqrt{2}} \simeq \frac{1}{4}$ و $f(e^{\sqrt{2}}) \simeq 1,1$ و $f(e^{-\sqrt{2}}) \simeq -0,3$)

30 نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}e^{\frac{1}{x}} & ; x<0 \\ f(x)=\dfrac{x^2}{2}-x\ln x & ; x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

ليكن (C_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) بين أن الدالة f متصلة في $x_0=0$.

2) بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

3) أ- حدد الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

ب- بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة : $y=x+2$ مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

4) ادرس قابلية اشتقاق على اليمين ثم على اليسار للدالة f في $x_0=0$ واعط تأويلا هندسيا لكل من النتيجتين .

5) لتكن f' الدالة المشتقة للدالة f على $\mathbb{R}^*$.

- بين أن لكل x من $]-\infty,0[$: $f'(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{(x-1)^2}(x^2-3x+1)$

- بين أن لكل x من $]0,+\infty[$: $f'(x)=x-1-\ln x$

6) لتكن f'' الدالة المشتقة الثانية للدالة f على $]0,+\infty[$.

أ- احسب $f''(x)$ لكل x من $]0,+\infty[$.

ب- ادرس إشارة $f''(x)$ على $]0,+\infty[$ واستنتج جدول تغيرات الدالة f' على $]0,+\infty[$.

ج- استنتج إشارة $f'(x)$ على المجال $]0,+\infty[$.

د- بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف I أفصولها موجب قطعا وحدد معادلة المماس لـ (C_f) في النقطة I

7) ضع جدول تغيرات الدالة f .

8) أنشئ المنحنى (C_f) (نأخذ : $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1\,cm$)

31 I- نعتبر الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي : $g(x)=\dfrac{x+1}{x}+\ln|x|$

1) حدد D_g حيز تعريف الدالة g واحسب نهايات الدالة g عند محدات D_g .

2) احسب $g'(x)$ لكل x من D_g ثم اعط جدول تغيرات الدالة g .

3) احسب $g(-1)$ واستنتج إشارة $g(x)$ لكل x من D_g .

II- لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي :

$$\begin{cases} f(x)=(x+1)\ln(-x) & , x<0 \\ f(0)=0 \\ f(x)=e^{(2-2x)+\ln x} & , x>0 \end{cases}$$

و (C_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) ادرس اتصال الدالة f على اليمين في $x_0=0$.

2) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في $x_0=0$ وأول هندسيا النتيجة المحصل عليها.

3) أ- احسب النهايات التالية : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x)$

ب- ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f)

4) أ- احسب $f'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}^*$ وادرس إشارتها .

ب- اعط جدول تغيرات الدالة f .

5) أ- اعط معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة A ذات الأفصول 1 .

ب- أنشئ المنحنى (C_f) (نقبل أن A نقطة انعطاف المنحنى (C_f))

32 نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي:

$$f(x)=\ln(e^{2x}-e^{x}+1)$$

ليكن (C_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) ادرس تغيرات الدالة f.

2) أ- بين أن لكل x من D_f : $f(x)=2x+\ln(1-e^{-x}+e^{-2x})$

ب- استنتج معادلة للمقارب المائل للمنحنى (C_f).

3) أ- اعط معادلة لمماس (C_f) في النقطة ذات الأفصول $x_0=0$، ارسم هذا المماس.

ب- انشئ المنحنى (C_f).

4) ليكن m عدداً حقيقياً، ناقش مبيانياً قيم m عدد الحلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x.

$$e^{2x}-e^{x}+1-e^{m}=0$$

33 نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي:

$$f(x)=\frac{4\sqrt{e^{2x}-1}}{e^{2x}+2}$$

ليكن (C_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) أ- حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f.

ب- حدد نهايات الدالة f عند محدات D_f.

2) أ- تحقق من أنه لكل x من $D_f-\{0\}$ لدينا

$$\frac{\sqrt{e^{2x}-1}}{x}=\sqrt{\frac{e^{2x}-1}{2x}\times\frac{2}{x}}$$

ب- ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في $x_0=0$. أول هندسياً النتيجة المحصل عليها.

3) أ- بين أن $\forall x\in D_f\setminus\{0\} \quad f'(x)=\frac{4(4-e^{2x})e^{2x}}{(2+e^{2x})^2\sqrt{e^{2x}-1}}$

ب- اعط جدول تغيرات الدالة f.

4) انشئ المنحنى (C_f).

34 نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي:

$$\begin{cases} f(x)=(x-1)e^{\left(\frac{1}{x-1}\right)} & , x<1 \\ f(x)=x-1-\frac{\ln x}{x} & , x\geq 1 \end{cases}$$

ليكن (C_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) أ- احسب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty}f(x)$

ب- بين أن الدالة f متصلة في $x_0=1$.

2) أ- ادرس قابلية اشتقاق الدالة f في $x_0=1$.

ب- بين أن لكل x من $]-\infty,1[$: $f'(x)=\frac{x-2}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$

ج- تحقق من أن f دالة تزايدية قطعاً على $]1,+\infty[$

د- اعط جدول تغيرات الدالة f.

3) أ- تحقق من أن المستقيم (D) ذا المعادلة: $y=x-1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$ ثم ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (D) على $]1,+\infty[$.

ب- بين أن $\lim_{x\to-\infty} f(x)-x=0$ وأول النتيجة هندسياً

4) انشئ المنحنى (C_f).

(تحديد نقط الإنعطاف غير مطلوب وتقبل أن (C_f) يوجد يوجد تحت مقاربه على $]-\infty,1[$)

35 نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي :

$$f(x)=\ln(x+3)$$

1) ادرس تغيرات الدالة f .

2) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بمايلي :

$$\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=f(u_n) \quad , n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

أ- بين أن المتتالية (u_n) تزايدية .

ب- بين أن المتتالية (u_n) مكبورة بالعدد 2 .

ج- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة .

نرمز ب $l=\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3) نعتبر المتتالية (w_n) المعرفة بمايلي :

$$\begin{cases} w_0=2 \\ w_{n+1}=f(w_n) \quad , n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

أ- بين أن المتتالية (w_n) تناقصية .

ب- بين أن المتتالية (w_n) مصغورة بالعدد 1 .

ج- استنتج أن المتتالية (w_n) متقاربة .

نرمز ب $l'=\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

د- بين أن $l=l'$.

36 نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي :

$$f(x)=\frac{\sqrt{4e^x-1}}{e^x}$$

1) حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f وحدد نهايات f عند محدات D_f

2) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في $x_0=\ln\frac{1}{4}$

3) ادرس تغيرات الدالة f .

4) انشئ المنحنى (C_f) في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

أخي / أختي

إن إستفدت من هذا الملف فالرجاء أن تدع لي و للمؤلف بالخير و النجاح و المغفرة